פרק 5 - מודולים

יהי R חוג.

מודול מעל R הוא חבורה אבלית $(M,+)$ עם פעולת כפל בסקלר $\begin{matrix} R\times M\to M \\ (\alpha,m)\mapsto \alpha\cdot m\end{matrix}$ כך ש

$$(\alpha+\beta)\cdot m=\alpha\cdot m+\beta\cdot m$$

$$\alpha\cdot(m+m')=\alpha\cdot m+\alpha\cdot m'$$

$$\alpha\cdot(\beta\cdot m)=(\alpha\beta)\cdot m$$

$$1\cdot m=m$$

$(R;+,\cdot;0,1)$ נקראים סקלרים
$(M;+;0)$ נקראים וקטורים

$$\cdot:R\times M\to M$$

דוגמה

נניח ש$\mathbb{F}$ שדה. מודול מעל $\mathbb{F}$ = מרחב ווקטורי.
(מודול הוא לחוג כמו שמרחב ווקטורי הוא לשדה)

דוגמאות

1. מרחב ווקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ הוא מודול מעל $\mathbb{F}$.
2. יהי R חוג. $R^n=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\middle| x_i\in R\right\}$ עם חיבור לפי רכיבים.

$$\alpha\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha x_1\\ \vdots\\ \alpha x_n\end{pmatrix}$$

R^n הוא מודול מעל R.

3. R^n מודול מעל $M_n\left(R\right)$ עם ה"כפל בסקלר"[1]

$$A\cdot x=\begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & a_{ij} & \cdots\\ & \vdots & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vdots\\ \sum a_{ij}x_j\\ \vdots\end{pmatrix}$$

זה מקיים את האקסיומות:

$$\left(A+B\right)x=Ax+Bx$$

$$A\left(x+y\right)=Ax+Ay$$

$$\left(AB\right)x=A\left(Bx\right)$$

$$Ix=x$$

4. מודול מעל $\mathbb{Z}$ = ?

- ברור ש$1\cdot x=x$
- לכן ברור גם ש$2\cdot x=\left(1+1\right)\cdot x=1\cdot x+1\cdot x=x+x$
- לכן ברור גם ש$3\cdot x=\left(2+1\right)\cdot x=2\cdot x+1\cdot x=x+x+x$
- וכן הלאה - ברור ש$n\cdot x=\cdots=\underbrace{x+x+\cdots+x}_{n\text{ times}}$

הערה

יהי M מודול מעל R.

$$0\cdot x+0\cdot x=\left(0+0\right)\cdot x=0\cdot x\Rightarrow0_R\cdot x=0_M$$

$$0=0\cdot x=\left(\alpha-\alpha\right)\cdot x=\alpha\cdot x+\left(-\alpha\right)\cdot x\Rightarrow\left(-\alpha\right)\cdot x=-\left(\alpha\cdot x\right)$$

ולכן

$$\left(-n\right)\cdot x=-\left(\underbrace{x+\cdots+x}_{n\text{ times}}\right)$$

מצד שני הכפל הנ"ל מקיים את כל האקסיומות. כלומר מודול מעל $\mathbb{Z}$ = חבורה אבלית.

[1] זהו אמנם כפל מטריצות, אבל כאן המטריצות הן הסקלרים.

סיכום ביניים

- מודול:חוג(כלומר מודול מעל חוג)
  - מ"ו:שדה
  - חבורה אבלית:$\mathbb{Z}$

המשך דוגמאות

5. יהי R חוג. כל אידיאל שמאלי $L \leq_l R$ הוא מוגול מעל R. פעולת הכפל הרגילה של R היא הכפל בסקלר.

5'. יהי R $A \leq_r R$ אידאל ימני. נבחר "כפל בסקלר" המוגדר לפי $\underbrace{x\alpha}_{A} = \underbrace{x}_{\in A} \cdot \underbrace{\alpha}_{\in R}$:

$$\begin{array}{cc}
(\alpha+\beta)\cdot m = \alpha\cdot m+\beta\cdot m & \checkmark \\
\alpha\cdot(m+m') = \alpha\cdot m+\alpha\cdot m' & \checkmark \\
\alpha\cdot(\beta\cdot m) = (\alpha\beta)\cdot m & \checkmark \\
1\cdot m = m & \checkmark \\
m\left(\beta\cdot\alpha\right) = \left(m\beta\right)\alpha \stackrel{?}{=} m\left(\alpha\beta\right) & \chi
\end{array}$$

A לא מודול בכפל הנ"ל!

5". יהי R חוג. אפשר להגדיר חוג חדש R^{op} עם אותם איברים ואותה פעולת חיבור, אבל

$$a^{\mathrm{op}}\cdot b^{\mathrm{op}} = (ba)^{\mathrm{op}}$$

אידיאל ימני הוא מודול מעל R^{op} על ידי הפעולה $\alpha\cdot x = x\alpha$.

הערה: $\left(R^{\mathrm{op}}\right)^{\mathrm{op}}$

6. $I \lhd R$. אפשר להגדיר

$$R\times\left({}^{\mathrm{R}}\!/\!_{\mathrm{I}}\right)\to {}^{\mathrm{R}}\!/\!_{\mathrm{I}}$$

$$\alpha\cdot(x+I) = \alpha x+I$$

כך ${}^{\mathrm{R}}\!/\!_{\mathrm{I}}$ מודול מעל R.

8. A חבורה אבלית.

$$\mathrm{End}\left(A\right) = \left\{\varphi : A\to A | \varphi \text{ preserves addition}\right\}$$

$$\left(\varphi+\varphi'\right)\left(a\right) = \varphi\left(a\right) +_A \varphi'\left(a\right)$$

$$\varphi\cdot\varphi' = \varphi\circ\varphi'$$

$$0_{\mathrm{End}(A)} = (a \mapsto 0)$$

$$1_{\mathrm{End}(A)} = (a \mapsto a)$$

מתברר ש$\mathrm{End}\,(A)$ הוא <u>חוג</u>.

$$\mathrm{End}\,(\mathbb{Z}) = \{\varphi_n | n \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$$

(φ_n - כפל בn)

$$\mathrm{End}\,(\mathbb{Z}/\mathrm{m}\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/\mathrm{m}\mathbb{Z}$$

$$\mathrm{End}\,(\mathbb{Z}/\mathrm{p}\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/\mathrm{p}\mathbb{Z}) \cong M_2\,(\mathbb{Z}/\mathrm{p}\mathbb{Z})$$

$$\mathrm{End}\left(\underbrace{\mathbb{Z}/\mathrm{m}\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/\mathrm{m}\mathbb{Z}}_{k \text{ times}}\right) \cong M_k\,(\mathbb{Z}/\mathrm{m}\mathbb{Z})$$

$$[\mathrm{End}\,(\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}) \hookleftarrow M_2\,(\mathbb{R})]$$

A היא מודול מעל $\mathrm{End}\,(A)$, כאשר $\varphi \cdot \alpha = \varphi\,(\alpha)$

- $(\varphi + \varphi')\,(a) = \varphi\,(a) + \varphi'\,(a)$ - הגדרת החיבור ב$\mathrm{End}\,(A)$
- $\varphi\,(a+b) = \varphi\,(a) + \varphi\,(b)$ - φ הומומורפיזם
- $\varphi\,(\varphi'\,(a)) = (\varphi \cdot \varphi')\,(0)$ - הגדרת הכפל ב$\mathrm{End}\,(A)$
- $1_A\,(a) = a$ - איבר היחידה של $\mathrm{End}\,(A)$

9. יהיו M מודול מעל חוג R. יש חוג $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}\,(M)$, $\varphi : M \to M$.

נגדיר:

$$\psi : R \to \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}\,(M)$$

ע"י

$$\psi\,(\alpha) = \left(\begin{array}{c} M \to M \\ x \mapsto \alpha x \end{array}\right)$$

- הפונקציה $x \mapsto \alpha x$ שומרת חיבור לפי האקסיומה II:

$$\alpha\,(x+y) = \alpha x + \alpha y$$

$$(\psi\,(\alpha+\beta))\,(x) = (\alpha+\beta)\,x = \alpha x + \beta x = (\psi\,(\alpha))\,(x) + (\psi\,(\beta))\,(x)$$

- ψ שומרת חיבור בגלל אקסיומה I:

$$(\psi(\alpha\beta))(x) = (\alpha\beta)(x) = \alpha(\beta x) = (\psi(\alpha) \circ \psi(\beta))(x)$$

- ψ שומרת כפל בגלל אקסיומה III
- $\psi(1) = 1_R$ שומרת כפל בגלל אקסיומה IV.

10. $\mathbb{F}$ שדה. מודול מעל $\mathbb{F}$ = מ"ו מעל $\mathbb{F}$.

תהי $T : V \to V$ העתקה לינארית.

נהפוך את V למודול מעל $\mathbb{F}[x]$.

$$f(x) \cdot v = f(T)(v) \qquad \left(\sum a_n x^n\right) v = \sum a_n T^n(v)$$

גם להיפך: נניח שV מודול מעל $\mathbb{F}[x]$, אז V אוטומטית מודול מעל $\mathbb{F}$ ולכן מ"ו.

בנוסף לזה, $T(v) = x \cdot v$ היא העתקה לינארית

$$T(v + v') = x(v + v') = x \cdot v + x \cdot v' = T(v) + T(v')$$

$$T(\alpha v) = x(\alpha v) = (x\alpha) v = (\alpha x) v = \alpha(xv) = \alpha T(v)$$

V מ"ו + $T : V \to V$ $\Leftrightarrow$ V הוא מודול מעל $\mathbb{F}[x]$.

הגדרה

יהי M מודול מעל חוג R.

תת־מודול של M הוא תת קבוצה $N \subseteq M$ שהיא בעצמה מודול $\Leftrightarrow$ $N \subseteq M$ סגורה לחיבור ולחיסור ולכפל בסקלר מR.

לדוגמה: לכל מודול M, M עצמו הוא תת־מודול.

כאשר R שדה, תת מודול = תת מרחב וקטורי.

דוגמה

כל חוג R הוא מודול מעל עצמו

$$\begin{array}{c} M \\ | \\ R \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} + & : & M \times M & \to & M \\ \cdot & : & R \times M & \to & M \\ + & : & R \times R & \to & R \\ \cdot & : & R \times R & \to & R \end{array}$$

תת המודולים של R = אידיאלים שמאליים!

עוד דוגמה

V מודול מעל $\mathbb{F}[x]$, כלומר V מ"ו. נתונה העתקה $T: V\dot{V}$ כך ש$T(v) = xv$.
מי הם התת מודולים של V? $W \subseteq V$
תת מרחבים אינווריאנטים ביחס לT: $xW \subseteq W$
w כך ש$T(w) \subseteq W$
מטריצה של תת מרחבים אינווריאנטים נראית כך:

$$\left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right)$$

כאשר הריבוע השמאלי־עליון הוא ווקטורים בת"ל אינווריאנטים לT, והחלק הימני הוא שאר האיברים אחרי שהשלמנו לבסיס.