תרגיל 1 מבוא לתורת החבורות

שאלה 1.1 נתונות קבוצות שמוגדרת עליהן פעולה. ענו עבור כל אחד מהמקרים: האם הוא אגודה (=חבורה למחצה)? האם הוא מונואיד? אם כן, מי הוא איבר היחידה? האם הוא חבורה? האם הפעולה היא חילופית?

1. $(\mathbb{N},*)$, המספרים הטבעיים עם הפעולה $a*b=a+b+2$.
פתרון: מבנה זה הוא אגודה כי ישנה סגירות והפעולה קיבוצית, שכן מתקיים
$$(a*b)*c=a+b+c+4=a*(b*c)$$
. הפעולה חילופית עקב חילופיות החיבור הרגיל בטבעיים. לא מדובר במונואיד כי אילו היה איבר יחידה, אזי הוא היה -2 שאינו מספר טבעי.

2. $(\mathbb{Z},*)$, המספרים השלמים עם הפעולה $a*b=a+b+2$.
פתרון: מבנה זה הוא חבורה, בשונה מן הסעיף הקודם. איבר היחידה הוא -2. האיבר ההופכי של a הוא $-a-4$. הפעולה חילופית.

3. $(\mathbb{N},\max)$, המספרים הטבעיים עם הפעולה של בחירת המקסימום.
פתרון: הסגירות של הפעולה ברורה. הפעולה קיבוצית כי
$$\max\{\max\{a,b\},c\}=\max\{a,b,c\}=\max\{a,\max\{b,c\}\}$$
איבר היחידה הוא 1 כי לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $\max\{n,1\}=\max\{1,n\}=n$. אין הפיך לאף איבר פרט ל־1, ולכן מדובר במונואיד. הפעולה חילופית.

4. $(2\mathbb{Z},\cdot)$, המספרים השלמים הזוגיים עם פעולת הכפל הרגילה.
פתרון: הפעולה סגורה כי כפל של מספרים שלמים זוגיים הוא שלם זוגי. הפעולה קיבוצית כי פעולת הכפל הרגילה של מספרים היא קיבוצית. לא קיים איבר יחידה, שכן אם $a\in 2\mathbb{Z}$ היה איבר יחידה אז יתקיים $2\cdot a=2$, ונקבל כי $a=1\notin 2\mathbb{Z}$. לכן מבנה זה הוא אגודה.

5. $(\mathbb{R},*)$, המספרים הממשיים עם הפעולה $a*b=\sqrt{a+b}$.
פתרון: הפעולה לא סגורה, למשל $0*-1=\sqrt{0-1}\notin\mathbb{R}$. לכן קבוצה זו היא בעצם אפילו לא מבנה אלגברי.

6. תהי X קבוצה. $(P(X),\triangle)$, כאשר $P(X)$ היא קבוצת החזקה של X. הפעולה היא ההפרש הסימטרי המוגדר לכל $A,B\in P(X)$ לפי $A\triangle B=(A\cup B)\backslash(A\cap B)$.
פתרון: מבנה זה הוא חבורה. סגירות נובעת מכך שאם $A,B\in P(X)$, אז גם $A\triangle B$ היא תת קבוצה של X. קיבוציות הפעולה ידועה ממתמטיקה בדידה. איבר היחידה הוא הקבוצה הריקה. קל לבדוק שכל איבר הוא ההופכי של עצמו. הפעולה (כפי ששמה רומז) היא חילופית.

7. הקבוצה הבאה ביחס לחיבור מטריצות
$$A=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}:a,b\in\mathbb{R},a^2+b^2>0\right\}$$
פתרון: הפעולה לא סגורה, למשל
$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\notin A$$

ולכן לא מדובר אפילו במבנה אלגברי.

8. $(A,\cdot)$, הקבוצה מן הסעיף הקודם ביחס לכפל מטריצות.
פתרון: מבנה זה הוא חבורה. הסגירות לא מיידית, שכן לא מספיק להראות שמכפלת שני איברים הוא מטריצה, אלא מטריצה ששייכת ל-A:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & bc+ad \\ -(bc+ad) & ac-bd \end{pmatrix}$$

ולשים לב כי $(ac-bd)^2+(bc+ad)^2$ שהיא הדטרמיננטה של המכפלה היא מכפלה של דטרמיננטות חיוביות, ולכן חיובית בעצמה. הפעולה קיבוצית כי כפל מטריצות הוא קיבוצי. איבר היחידה הוא מטריצת היחידה I_2. כל מטריצה במבנה זה היא הפיכה מפני שמתקיים $a^2+b^2>0$ שהיא הדטרמיננטה, כשהאיבר ההופכי הוא

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

ודאו למה מטריצה זו שייכת למבנה. בדיקה ישירה תראה שהפעולה חילופית.

שימו לב: החבורה הזאת היא למעשה החבורה הכפלית של שדה המספרים המרוכבים.

9. המספרים המרוכבים מערך מוחלט 1 עם כפל רגיל

$$A=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|=1\}$$

פתרון: זאת חבורה. יש סגירות כי אם $|z|=|w|=1$ אז בוודאי $|zw|=1$. הפעולה אסוציאטיבית כי היא כפל ב $\mathbb{C}$. איבר היחידה הוא 1. יש הופכי כי אם $|z|=1$ אז $|\frac{1}{z}|=1$ ולכן $\frac{1}{z}\in A$. הפעולה כמובן גם חילופית.

שאלה 1.2 תהי G חבורה. הוכיחו כי G אבלית אם ורק אם לכל $a,b\in G$ מתקיים כי $(ab)^2=a^2b^2$.
פתרון: נניח שהשוויון $(ab)^2=a^2b^2$ מתקיים. לכל זוג איברים $a,b\in G$ מתקיים $(ab)^2=abab=aabb=a^2b^2$. נכפיל משמאל ב-a^{-1} ומימין ב-b^{-1} ונקבל

$$a^{-1}ababb^{-1}=ba=ab=a^{-1}aabbb^{-1}$$

כלומר $ba=ab$ כלומר החבורה אבלית. מצד שני, אם G אבלית בוודאי ש

$$(ab)^2=abab=aabb=a^2b^2$$

שאלה 1.3 תהי $(G,\cdot)$ חבורה. נבחר $g\in G$ מסוים. נגדיר פעולה חדשה על G לפי $a*b=agb$. האם $(G,*)$ היא חבורה? אילו אקסיומות של חבורה מתקיימות ואילו לא?
פתרון: כן. זו חבורה. ברור שיש סגירות. אסוציאטיביות מתקיימת כי

$$(a*b)*c=(agb)gc=ag(bgc)=a*(b*c)$$

איבר היחידה הוא g^{-1} וההופכי של a הוא $g^{-1}a^{-1}g^{-1}$. אכן מתקיים

$$a * g^{-1}a^{-1}g^{-1} = agg^{-1}a^{-1}g^{-1} = aa^{-1}g^{-1} = g^{-1}$$

ובדומה

$$g^{-1}a^{-1}g^{-1} * a = g^{-1}$$

שאלה 1.4 עבור אילו ערכי n החבורה S_n היא אבלית (זכרו: S_n היא חבורת כל התמורות על n איברים).

אם $n = 1$ החבורה אבלית בוודאי. עבור $n = 2$ יש רק 2 אברים ושוב קל לבדוק שהחבורה אבלית.

עבור $n = 3$ החבורה לא אבלית כי קל לבדוק

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

עבור $n > 3$ החבורה גם לא אבלית כי אפשר לקחת תמורות שעושות ל $\{1,2,3\}$ מה שהתמורות למעלה עושות ולא נוגעות בשאר האיברים. כלומר:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 & \cdots & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 & \cdots & n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

שאלה 1.5 תהי $\sigma \in S_n$ תמורה. נגדיר את התומך של σ להיות קבוצת האיברים שהיא משנה. כלומר:

$$\operatorname{supp}\sigma = \{k \in \{1,\dots n\} \mid \sigma(k) \neq k\}$$

1. הוכיחו כי אם $i \in \operatorname{supp}\sigma$ אז $\sigma(i) \in \operatorname{supp}\sigma$

פתרון: נניח בשלילה ש $\sigma(i) \notin \operatorname{supp}\sigma$ כלומר לפי הגדרה $\sigma\sigma(i) = \sigma(i)$ אבל σ חד־חד ערכית ולכן $\sigma(i) = i$ בסתירה לכך ש $i \in \operatorname{supp}\sigma$

2. שתי תמורות σ ו τ נקראות זרות אם $\operatorname{supp}\sigma \cap \operatorname{supp}\tau = \varnothing$. הוכיחו כי אם σ ו τ זרות אז $\sigma\tau = \tau\sigma$.

פתרון: נראה שלכל $i \in \{1,\dots n\}$ מתקיים ש $\sigma\tau(i) = \tau\sigma(i)$ יש 3 אפשרויות.

(א) אם $i \in \operatorname{supp}\sigma$ אז לפי סעיף 1 בהכרח $\sigma(i) \in \operatorname{supp}\sigma$ ולכן לפי הנתון $i, \sigma(i) \notin \operatorname{supp}\tau$ ולכן קל לחשב

$$\sigma\tau(i) = \sigma(i)$$

(כי i לא בתומך של τ)

$$\tau\sigma(i) = \sigma(i)$$

(כי $\sigma(i)$ לא בתומך של τ)

(ב) המקרה $i \in \operatorname{supp}\tau$ זהה למקרה הקודם.

(ג) במקרה $i \notin \operatorname{supp}\tau$ ו $i \notin \operatorname{supp}\sigma$ אז מיידי ש

$$\sigma\tau(i) = i = \tau\sigma(i)$$

שאלה 1.6 תהי G חבורה.

1. נגדיר חזקה חיובית של איבר בצורה רקורסיבית:

$$a^0 = 1$$
$$a^n = a^{n-1} \cdot a$$

הוכיחו באינדוקציה שחוקי החזקות הרגילים מתקיימים (עבור n, m מספרים טבעיים):

(א) $a^n a^m = a^{n+m}$

פתרון: נניח n נתון ונבצע אינדוקציה על m. נניח שמתקיים

$$a^n a^{m-1} = a^{n+m-1}$$

אז

$$a^n a^m = a^n a^{m-1} a = a^{n+m-1} a = a^{n+m}$$

(ב) $(a^n)^m = a^{nm}$

פתרון: נניח n נתון ונבצע אינדוקציה על m. נניח שמתקיים

$$(a^n)^{m-1} a^{n(m-1)}$$

אז לפי הנחת האינדוקציה והסעיף הקודם

$$(a^n)^m = (a^n)^{m-1} a^n = a^{n(m-1)} a^n = a^{nm}$$

2. הוכיחו כי $(a^n)^{-1} = (a^{-1})^n$

פתרון: קודם כל צריך להוכיח בנפרד ש

$$a a^{n-1} = a^n$$

זה שוב משהו שאפשר להוכיח בקלות באינדוקציה ולא נפרט לגביו.

גם את הטענה שלנו נוכיח באינדוקציה. נניח ש

$$(a^{n-1})^{-1} = (a^{-1})^{n-1}$$

אז אנחנו רוצים להוכיח ש

$$(a^n)^{-1} = (a^{-1})^n$$

נוודא:

$$a^n(a^{-1})^n = aa^{n-1}(a^{-1})^{n-1}a^{-1}$$

לפי הנחת אינדוקציה זה שווה ל

$$a1a^{-1} = aa^{-1} = 1$$

הערה: את ההגדרה מסעיף 1 אפשר להרחיב לכל מספר שלם באופן הבא: אם n מספר טבעי אז

$$a^{-n} = (a^n)^{-1} = (a^{-1})^n$$

אפשר להוכיח שחוקי החזקות מסעיף 1 עדיין מתקיימים (עבור m, n שלמים כלשהם).
- אתם מוזמנים לעשות זאת כתרגיל (צריך לפצל לכל מני מקרים)