<u>תרגול 8</u>

הגדרה: ל f יש מקסימום (נקרא גם מקסימום גלובאלי) בנקודה $c \in I$ של הקטע I אם $f(x) \le f(c) \quad \forall x \in I$.

בצורה דומה מגדירים מינימום גלובאלי.

ל f יש מקסימום לוקאלי (מקומי) בנקודה $c \in I$ אם קיים קטע פתוח $c \in (a,b) \subseteq I$ כך ש $f(x) \le f(c)$ לכל $x \in (a,b)$. בצורה דומה מגדירים מינימום מקומי.

הערות: 1) מקסימום (מינימום) בנקודה $c \in I$ הוא מקסימום (מינימום) מקומי או ש c נקודת קצה של I.

2) קיצון מקומי של הפונקציה f שמוגדרת ב I הוא למעשה קיצון גלובאלי של הפונקציה המצומצמת על תת קטע של I (אותו קטע פתוח שתואר לעיל).

תרגיל: מצאו את הנקודות בקטע $(0,2\pi)$ (אם ישנן) שבהן הפונקציה $f(x) = \sin x + \cos x$ מקבלת מינימום/מקסימום מקומי.

פתרון: הנקודות הקריטיות שבהן יכול להתקבל קיצון הן נקודות הקצה (אין כאלה), הנקודות שבהן הנגזרת לא קיימת (אין כאלה) ונקודות שבהן הנגזרת מתאפסת. $f'(x) = \cos x - \sin x = 0$ אם ורק אם $\tan(x) = 1$. נקבל את הנקודות הקריטיות $x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$. נשים לב ש $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}, f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$.

איך נדע אם אכן יש בהן קיצון מקומי ומה סוגו?

דרך א: המבחן הישיר- $\frac{\pi}{4}$ הנקודה הקריטית הפנימית היחידה בקטע $\left(0, \frac{5\pi}{4}\right)$.

$\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{4} < \pi$ (הנקודות לקוחות מהקטע)

ומתקיים $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1+\sqrt{3}}{2}<f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}>f(\pi)=-1$ ולכן הפונקציה f מצומצמת על $\left(0,\frac{5\pi}{4}\right)$ מקבלת מקסימום ב$\frac{\pi}{4}$ ורק שם. בפרט, ב$\frac{\pi}{4}$ מתקבל מקסימום מקומי.

$\frac{5\pi}{4}$ הנקודה הקריטית הפנימית היחידה ב$\left(\frac{\pi}{2},2\pi\right)$ $\pi<\frac{5\pi}{4}<\frac{3\pi}{2}$ (הנקודות לקוחות מהקטע) ומתקיים $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-1$ $f\left(\frac{5\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}<$ $f(\pi)=-1>$. לכן, הפונקציה f מצומצמת על $\left(\frac{\pi}{2},2\pi\right)$ מקבלת מינימום ב$\frac{\pi}{4}$ ורק שם. בפרט, ב$\frac{\pi}{4}$ מתקבל מינימום מקומי.

דרך ב:מבחן הנגזרת השניה- $\frac{\pi}{4}$ הנקודה הקריטית הפנימית היחידה בקטע $\left(0,\frac{5\pi}{4}\right)$, $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$. $f''(x)=-\sin x-\cos x$ ולכן $f''\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}<0$ ומכאן הפונקציה f מצומצמת על $\left(0,\frac{5\pi}{4}\right)$ מקבלת מקסימום ב$\frac{\pi}{4}$ ורק שם. בפרט, ב $\frac{\pi}{4}$ מתקבל מקסימום מקומי.

מכיון ש $f''\left(\frac{5\pi}{4}\right)=\sqrt{2}>0$ מסיקים בצורה דומה ש ב $\frac{5\pi}{4}$ מתקבל מקסימום מקומי.

שאלה: האם מהדיון הנ"ל ניתן להסיק ש f מקבלת מינימום גלובאלי ב $\frac{\pi}{4}$ ומקסימום גלובאלי ב$\frac{5\pi}{4}$?

תשובה:לא. נראה שאכן f מקבלת מינימום גלובאלי ב $\frac{\pi}{4}$ ומקסימום גלובאלי ב $\frac{5\pi}{4}$ אבל לצורך כך נזדקק למשפט הבא.

משפט:פונקציה רציפה בקטע סגור מקבלת בו מינימום ומקסימום.

תרגיל: מצאו את הנקודות בקטע $[0,2\pi]$ שבהן הפונקציה $f(x)=\sin x+\cos x$ מקבלת מינימום/מקסימום.

פתרון: f רציפה בקטע הסגור $[0,2\pi]$ ולכן מקבלת מינימום ומקסימום. לנקודות הקריטיות מהתרגיל הקודם יש להוסיף רק את נקודות הקצה. $f\left(\frac{5\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}<f(0)=f(2\pi)=1<\sqrt{2}=f\left(\frac{\pi}{4}\right)$. מכיון שמצד אחד בהכרח f מקבלת מינימום ומקסימום בקטע ומצד שני המינימום והמקסימום צריכים להתקבל בנקודה קריטית (ממשפט הנקודה הקריטית) אז מהשוואת הערכים בנקודות הקריטיות נקבל ש f מקבלת מקסימום ב $\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ומינימום ב $\left(\frac{5\pi}{4}\right)$. נשים לב שזה כמובן גורר בהכרח שהפונקציה $\sin x+\cos x$ בקטע הפתוח $(0,2\pi)$ מקבלת מקסימום ב $\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ומינימום ב $\left(\frac{5\pi}{4}\right)$. אבל, היינו חייבים להיעזר בקטע הסגור $[0,2\pi]$ כדי לקבוע את זה.

הגדרה: 1) פונקציה f קמורה (או קמורה מעלה) בקטע I אם לכל $x,y\in I$ כך ש $y>x$ הקו המחבר בין הנקודות $(x,f(x))$ ל $(y,\ f(y))$ נמצא מעל גרף הפונקציה. למשל: $f(x)=x^2$ קמורה ב $\mathbb{R}$.

2) פונקציה f קעורה (או קמורה מטה) בקטע I אם לכל $x,y\in I$ כך ש $y>x$ הקו המחבר בין הנקודות $(x,f(x))$ ל $(y,f(y))$ נמצא מתחת לגרף הפונקציה. למשל: $f(x)=-x^2$ קעורה ב $\mathbb{R}$.

משפט: נניח ש f רציפה ב I ובעלת נגזרת שניה בכל נקודה פנימית של I.

א) אם $f''(x)>0$ בכל נקודה פנימית של I אז f קמורה ב I.

ב) אם $f''(x)<0$ בכל נקודה פנימית של I אז f קעורה ב I.

הגדרה: תהי c נקודה פנימית של I. $c \in I$ נקודת פיתול של f אם הפונקציה עוברת מקמירות לקעירות (או ההיפך) ב c.

תרגיל: חקרו את הפונקציה $f(x)=\ln^2 x$ בתחום $\left[\frac{1}{e},e^2\right]$.

פתרון: $f'(x)=\frac{2\ln x}{x},\ f''(x)=\frac{2\cdot\frac{1}{x}\cdot x-2\ln x}{x^2}=\frac{2(1-\ln x)}{x^2}$. נשים לב שהנגזרת השניה קיימת ורציפה בקטע.

נקודות נוספות שיעניינו אותנו הן הנקודות שבהן הנגזרת השניה מתאפסת $f''(x)=\frac{2(1-\ln x)}{x^2}=0 \Leftrightarrow 1-\ln x=0 \Leftrightarrow x=e$. ניעזר בטבלה הבאה

$f''(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	x
$+$	$-$	1	$\frac{1}{e}$
$+$	0	0	1
0	$+$	1	e
$-$	$+$	4	e^2

מהטבלה ניתן להסיק:

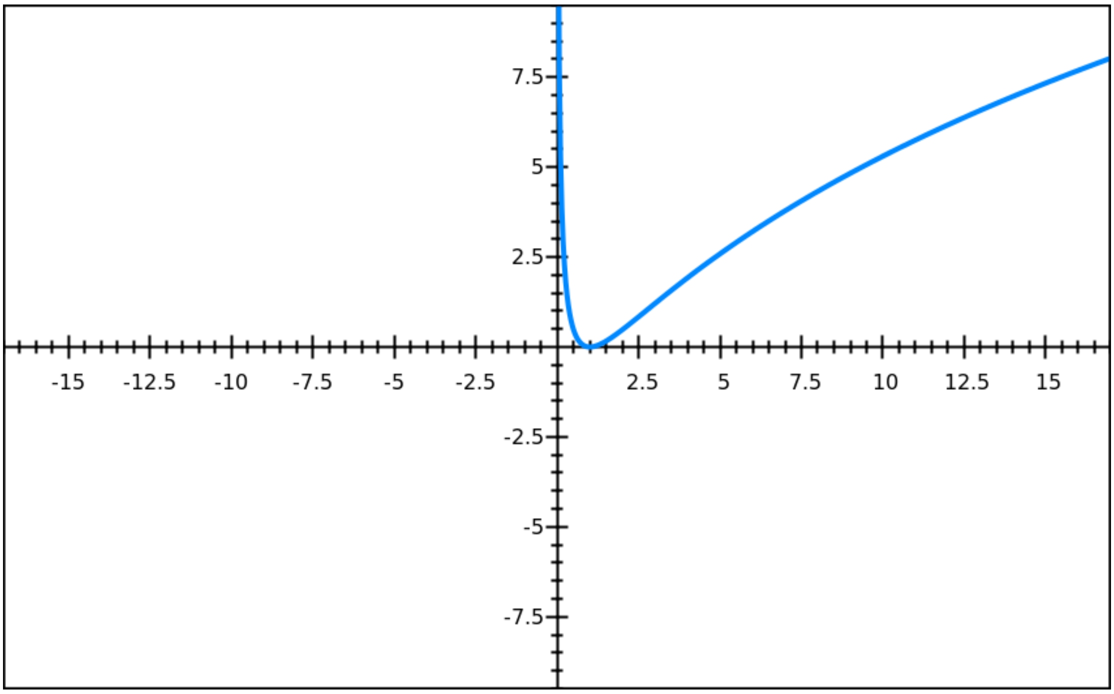
$(1,0)$ נקודת מינימום מקומי (לפי הסימן של הנגזרת השניה למשל) וכן מינימום גלובאלי מהשוואת הערכים בקצוות (מדובר בפונקציה רציפה בקטע סגור). $(e^2,4)$ נקודת מקסימום גלובאלי .

עפ"י סימן הנגזרת הראשונה- תחומי עליה: $\left(1,e^2\right]$, תחומי ירידה : $\left[\frac{1}{e},1\right)$.

עפ"י סימן הנגזרת השניה- תחומי קמירות: $\left[\frac{1}{e},e\right)$, תחומי קעירות: $\left(e,e^2\right]$

והנקודה $(e,1)$ היא נקודת פיתול.

שרטוט:



תרגיל: חקרו את הפונקציה $f(x)=\sin x\cos x$ בקטע $[0,\pi]$.

פתרון: $f'(x)=\cos x\cos x-\sin x\sin x=cos^2x-\sin^2 x=\cos(2x)$
$f''(x)=-2\sin(2x)$.

הנגזרת השניה קיימת ורציפה בקטע.

$f'(x)=0$ אם ורק אם $\cos(2x)=0$. הפתרון הכללי הוא:
$k\in\mathbb{Z}$, $2x=\frac{\pi}{2}+\pi k \Leftarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$ ובתחום שלנו נקבל את הנקודות הקריטיות $x=\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}$. להן יש להוסיף את נקודות הקצה $x=0,\pi$.

$f''(x)=-2\sin(2x)=0$ בתחום בנקודות $x=0,\frac{\pi}{2},\pi$.

נכין טבלה:

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	$+$	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	-
$\frac{\pi}{2}$	0	$-$	0
$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	+
π	0	$-$	0

מהטבלה ניתן להסיק:

תחומי עליה: $\left[0,\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right]$.

תחומי ירידה: $\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$

$\left(\frac{\pi}{4},\frac{1}{2}\right)$ מקסימום מקומי ולמעשה גלובאלי מהשוואת הערכים מול הקצוות.

$\left(\frac{\pi}{4},-\frac{1}{2}\right)$ מינימום מקומי ולמעשה גלובאלי מהשוואת הערכים מול הקצוות.

תחומי קמירות: $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$, תחומי קעירות: $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ והנקודה $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ היא נקודת פיתול.

שרטוט: