<u>תרגול 7 – אדם צ'פמן</u>

התפלגות משותפת של שני משתנים (או יותר)

נתונים שני משתנים מקריים, X וY. לכל אחד התפלגות משלו. במידה והם בלתי-תלויים, יש אי-תלות בין המאורעות הקשורים בהם, כלומר $P(X = a, Y = b) = P(X = a) \cdot P(Y = b)$, אול לחילופים $P(Y = b|X = a) = P(Y = b)$. בפרט, $P(Y = b|X = a) = P(Y = b|X = c)$ עבור $a \neq c$.

אולם, לא תמיד זהו המצב.

לדוגמא:

אם מספר האנשים במעלית הוא משתנה X שמתפלג אחיד בין 1 ל6, ומספר הנשים מתוכם הוא משתנה Y, ונתון שלאיש אקראי במעלית יש סיכוי של $\frac{1}{2}$ להיות אישה וסיכוי של $\frac{1}{2}$ להיות גבר, אז הסיכוי שברגע נתון במעלית יש אישה אחת אם ידוע כי יש במעלית איש אחד הוא $\frac{1}{2}$, כלומר $P(Y = 1|X = 1) = \frac{1}{2}$, בעוד שהסיכוי שבמעלית יש אישה אחת בהינתן זה שיש במעלית שני אנשים הוא $P(Y = 1|X = 3) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$. באופן כללי, הסיכוי שיש במעלית אישה אחת הוא

$$P(Y = 1) = \sum_{k=1}^{6} P(Y = 1|X = k) \cdot P(X = k) = \sum_{k=1}^{6} k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{16}$$

בדוגמא הזאת, X וY תלויים (כלומר אינם בלתי-תלויים).

שונות ותוחלת של סכום משתנים מקריים

אם X וY הם משתנים מקריים נתונים, גם הסכום שלהם $Z = X + Y$ הוא משתנה מקרי. התוחלת של Z היא תמיד $E(Z) = E(X + Y) = E(X) + E(Y)$. השונות מקיימת $V(Z) = V(X) + V(Y)$ רק כשהמשתנים בלתי-תלויים.

שאלה:

ההתפלגות המשותפת של שני משתנים X וY נתונה בטבלה

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$
$X = 0$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
$X = 1$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
$X = 2$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

א. מצאו את $Var(X), Var(Y), Var(X-Y)$.

ב. האם X ו-Y בלתי-תלויים?

ג. באופן כללי, אם X ו-Y בלתי -תלויים, מה ניתן לומר על $Var(X-Y)$?

פתרון:

$$P(X=0)=\frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{1}{4}, P(X=1)=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}, P(X=2)=\frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{1}{4}$$

$$E(X)=0\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}=1$$

$$E(X^2)=0\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\frac{1}{4}=1\frac{1}{2}$$

$$V(X)=E(X^2)-\left(E(X)\right)^2=1\frac{1}{2}-1=\frac{1}{2}$$

באופן דומה מקבלים $P(Y=0)=\frac{1}{4}, P(Y=1)=\frac{1}{2}, P(Y=2)=\frac{1}{4}, E(Y)=1, E(Y^2)=1\frac{1}{2}, V(Y)=\frac{1}{2}$.

$$P(X-Y=-2)=\frac{1}{16}$$

$$P(X-Y=-1)=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$$

$$P(X-Y=0)=\frac{1}{16}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}=\frac{3}{8}$$

$$P(X-Y=1)=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$$

$$P(X-Y=2)=\frac{1}{16}$$

$$E(X-Y)=-2\cdot\frac{1}{16}+(-1)\cdot\frac{1}{4}+0\cdot\frac{3}{8}+1\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{16}=0$$

$$E((X-Y)^2)=4\cdot\frac{1}{16}+1\cdot\frac{1}{4}+0\cdot\frac{3}{8}+1\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{16}=1$$

$$V(X-Y)=E((X-Y)^2)-\left(E(X-Y)\right)^2=1-0=1$$

המשתנים בלתי תלויים, משום שלכל ערכים a,b מתקיים $P(X=a,Y=b)=P(X=a)\cdot P(Y=b)$.

נשים לב ש$X-Y=X+(-Y)$ וש$P(-Y=-b)=P(Y=b)$, משמע

$$P(X=a,-Y=-b)=P(X=a)\cdot P(Y=-b)$$

כלומר, המשתנים $X,-Y$ בלתי-תלויים, ולכן $V(X-Y)=V(X)+V(-Y)$. כעת,

$$V(-Y)=E((-Y)^2)-\left(E(-Y)\right)^2=E(Y^2)-\left(-E(Y)\right)^2=E(Y^2)-\left(E(Y)\right)^2=V(Y)$$

ולכן $V(X-Y)=V(X)+V(Y)$.

שאלה:

א. מושיבים באקראי 2 זוגות בשולחן סטנדרטי עם שני מושבים בכל צד. מהי תוחלת מספר הזוגות שיושבים זה מול זה?

ב. מושיבים באקראי 5 זוגות בשולחן מלבני ארוך עם 5 מושבים מכל צד. מהי תוחלת מספר הזוגות שיושבים זה מול זה?

תשובה:

פתרנו את השאלה הזאת בעבר, אולם עכשיו נפתור אותה בעזרת העובדה ש$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$. נסמן בX את המשתנה המקבל 1 אם זוג מספר 1 יושבים זה מול זה ו0 אחרת, ובY את המשתנה המקבל 1 אם זוג מספר 2 יושבים זה מול זה ו0 אחרת. מספר הזוגות היושבים זה מול זה הוא $X+Y$. מול איש אחד, הסיכוי שבן\ת הזוג שלו יושב\ת מולו הוא $\frac{1}{3}$ ולכן

$$P(X=1)=P(Y=1)=\frac{1}{3}$$

לכן $E(X)=E(Y)=\frac{1}{3}$. כיוצא בכך, $E(X+Y)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

באופן הזה, החישוב נשאר פשוט גם כשיש מספר גבוה יותר של זוגות. נסמן בX_k את המשתנה המחזיר 1 אם הזוג הk יושבים זה מול זה. מספר הזוגות היושבים זה מול זה הוא $X_1+\cdots+X_5$. הסיכוי שמול איש נתון יושב\ת בן\ת הזוג שלו הוא $\frac{1}{9}$. לכן $P(X_k=1)=\frac{1}{9}$. משמע $E(X_k)=\frac{1}{9}$ ו$E(X_1+\cdots+X_5)=\frac{5}{9}$.

שאלה:

(מתוך מבחן בהסתברות להנדסת חשמל, האוניברסיטה העברית 2016) בשולחן עגול עם 10 מקומות ישיבה מושיבים באקראי 5 זוגות. מהי תוחלת מספר הזוגות היושבים זה לצד זה?

פתרון:

נסמן ב X_k את המשתנה המחזיר 1 אם הזוג הk יושבים זה לצד זה. מספר הזוגות היושבים זה לצד זה הוא $X_1+\cdots+X_5$. בהינתן איש, הסיכוי שבן\ת הזוג שלו יושב\ת לידו הוא $P(X_k)=\frac{2}{9}$. לכן $E(X_k)=\frac{2}{9}$ ואז

$$E(X_1 + \cdots + X_5) = 5 \cdot \frac{2}{9} = \frac{10}{9}$$