מכפלה פנימית

מטרה: הגדרת מושגי אורך וזווית.

הגדרה: יהי V מ"ו מעל שדה $\mathbb{F}$, כאשר $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ או $\mathbb{F}=\mathbb{C}$.
מכפלה פנימית (מ"פ) inner product על V היא פונקציה $\langle\cdot,\cdot\rangle: V\times V\to \mathbb{F}$ המקיימת:

(א) לינאריות במשתנה הראשון:

$$\langle \alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2, w\rangle = \alpha_1\langle v_1,w\rangle+\alpha_2\langle v_2,w\rangle \quad (\forall \alpha_1,\alpha_2\in \mathbb{F},\ v_1,v_2,w\in V)$$

(ב) עבור $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ - סימטריות: $\langle w,v\rangle=\langle v,w\rangle \quad (\forall v,w\in V)$

עבור $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ - הרמיטיות: $\langle w,v\rangle=\overline{\langle v,w\rangle} \quad (\forall v,w\in V)$

(תזכורת: אם $z=x+iy$ כאשר $x,y\in\mathbb{R}$ אז $\bar z = x-iy$ (הצמוד המרוכב))

(ג) חיוביות: $\langle v,v\rangle\geq 0$ לכל $v\in V$, ושוויון אם ורק אם $v=\vec 0$.

הערות:

* עבור $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ יש גם לינאריות במשתנה השני (בגלל סימטריות):

$$\langle v,\alpha_1w_1+\alpha_2w_2\rangle \overset{(ב)}{=} \langle \alpha_1w_1+\alpha_2w_2,v\rangle \overset{(א)}{=} \alpha_1\langle w_1,v\rangle+\alpha_2\langle w_2,v\rangle \overset{(ב)}{=} \alpha_1\langle v,w_1\rangle+\alpha_2\langle v,w_2\rangle$$

עבור $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ יש רק "כמעט לינאריות" במשתנה השני:

$$\langle v,\alpha_1w_1+\alpha_2w_2\rangle = \overline{\langle\alpha_1w_1+\alpha_2w_2,v\rangle} = \overline{\alpha_1\langle w_1,v\rangle+\alpha_2\langle w_2,v\rangle} = \bar\alpha_1\langle v,w_1\rangle+\bar\alpha_2\langle v,w_2\rangle$$

* אפשר לומר שנדרשת הרמיטיות גם עבור $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ (כי $\bar x = x$ עבור $x\in\mathbb{R}$)
* בגלל הרמיטיות, $\overline{\langle v,v\rangle}=\langle v,v\rangle$ (החלפת מקומות) ולכן $\langle v,v\rangle\in\mathbb{R}$ גם כאשר $\mathbb{F}=\mathbb{C}$. תנאי (ג) מוסיף דרישת חיוביות.
* מדוע לא דורשים סימטריות עבור $\mathbb{F}=\mathbb{C}$? כי זה לא יעבוד.
למשל, אם $c=\langle v,v\rangle>0$ נקבל (בהנחת סימטריות) $\langle iv,iv\rangle = i^2\langle v,v\rangle=-c<0$, בעוד שבהנחת הרמיטיות: $\langle iv,iv\rangle = i\bar i\langle v,v\rangle = c>0$.
* מ-(א) נובע כי $\langle \vec0,w\rangle = \langle 0\cdot\vec0,w\rangle = 0$ לכל $w\in V$, ובפרט $\langle\vec0,\vec0\rangle=0$.

דוגמאות:

(1) $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, $V=\mathbb{R}^n$, עבור וקטורים

$v=(v_1,\dots,v_n)\in\mathbb{R}^n$

$w=(w_1,\dots,w_n)\in\mathbb{R}^n$

נגדיר את <u>המכפלה הסקלרית</u> (מכפלת dot) ע"י :

$$\langle v,w\rangle := v\cdot w = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$$

קל לראות שזו מכפלה פנימית על $\mathbb{R}^n$.

(2) $\mathbb{F}=\mathbb{C}$, $V=\mathbb{C}^n$. כאן, עבור

$v=(v_1,\dots,v_n)\in\mathbb{C}^n$

$w=(w_1,\dots,w_n)\in\mathbb{C}^n$

נגדיר:
$$\langle v,w\rangle := v\cdot w = \sum_{i=1}^{n} v_i \overline{w_i}$$

(3) $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, $V=\mathbb{R}^{m\times n}$ (מטריצות מלבניות).

עבור מטריצות $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ נגדיר:

$$\langle A,B\rangle := tr(AB^t) = \sum_i\sum_j a_{ij}b_{ij}$$

זו מכפלה פנימית על V, שהיא בעצם המכפלה הסקלרית הרגילה אם "פורשים" כל מטריצה לוקטור באורך mn.

(4) $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, $V=C[a,b]$, מרחב כל הפונקציות הרציפות $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ כאשר $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ קטע סגור נתון. מגדירים:

$$\langle f,g\rangle := \int_a^b f(x)g(x)\,dx \qquad (\forall f,g\in V)$$

לא קשה להראות (אינפי) שזו מ"פ על V.

עבור פונקציות רציפות $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ מגדירים: $\langle f,g\rangle := \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx$.

<u>משפט</u>: (אי-שוויון קושי-שוורץ-בוניאקובסקי)

Augustin-Louis Cauchy (צרפת, 1789-1857), Karl Hermann Amandus Schwarz (גרמניה, 1843-1921),

Віктор Якович Буняковський (אוקראינה, רוסיה, 1804-1889)

יהי V מרחב מ"פ מעל $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$, ויהיו $v,w\in V$.

אזי: $|\langle v,w\rangle| \le \|v\|\cdot\|w\|$

ושוויון אם ורק אם v,w ת"ל (כלומר: $v=\vec{0}$, או $w=\vec{0}$, או $v=\alpha w$ עבור $0\neq\alpha\in\mathbb{F}$)

<u>הגדרה</u>: אם V מרחב מ"פ, $v\in V$, אז <u>הנורמה</u> (אורך) של v

$\|v\| := \sqrt{\langle v,v\rangle}$ (השורש האי-שלילי)

<u>הוכחה:</u> ראשית, אם $v=\vec{0}$ או $w=\vec{0}$ אז שני האגפים שווים ל-0.

נניח אם כן: $v,w\neq\vec{0}$. נתבונן בוקטור $z:=v-\frac{\langle v,w\rangle}{\langle w,w\rangle}w$.

$$0\overset{(ג)}{\le}\langle z,z\rangle=\langle v-\frac{\langle v,w\rangle}{\langle w,w\rangle}w,\ v-\frac{\langle v,w\rangle}{\langle w,w\rangle}w\rangle$$
$$=\langle v,v\rangle-\langle v,\frac{\langle v,w\rangle}{\langle w,w\rangle}w\rangle-\langle\frac{\langle v,w\rangle}{\langle w,w\rangle}w,v\rangle+\langle\frac{\langle v,w\rangle}{\langle w,w\rangle}w,\frac{\langle v,w\rangle}{\langle w,w\rangle}w\rangle$$
$$=\langle v,v\rangle-\frac{\overline{\langle v,w\rangle}}{\langle w,w\rangle}\langle v,w\rangle-\frac{\langle v,w\rangle}{\langle w,w\rangle}\langle w,v\rangle+\frac{\langle v,w\rangle\overline{\langle v,w\rangle}}{\langle w,w\rangle^2}\langle w,w\rangle$$
$$=\langle v,v\rangle-\frac{|\langle v,w\rangle|^2}{\langle w,w\rangle}-\frac{|\langle v,w\rangle|^2}{\langle w,w\rangle}+\frac{|\langle v,w\rangle|^2}{\langle w,w\rangle}$$
$$=\langle v,v\rangle-\frac{|\langle v,w\rangle|^2}{\langle w,w\rangle}$$

לכן $|\langle v,w\rangle|^2\le\langle v,v\rangle\langle w,w\rangle$ כנדרש.

לגבי שוויון (כאשר $v,w\neq\vec{0}$): זה קורה אם ורק אם $\langle z,z\rangle=0$, כלומר $z=\vec{0}$, ולפי הגדרת z זה <u>גורר</u> v, w ת"ל. להיפך, אם $v=\alpha w$ ($v,w\neq\vec{0}$, $0\neq\alpha\in\mathbb{F}$) אז $|\langle v,w\rangle|=|\langle\alpha w,w\rangle|=|\alpha\langle w,w\rangle|=|\alpha|\langle w,w\rangle$

$|\langle v,v\rangle|=|\langle\alpha w,\alpha w\rangle|=|\alpha\bar{\alpha}\langle w,w\rangle|=|\alpha|^2\langle w,w\rangle$

לכן יש שוויון $|\langle v,w\rangle|^2=\langle v,v\rangle\langle w,w\rangle$. ∎

נזכיר את הגדרת הנורמה (אורך): $\|v\|:=\sqrt{\langle v,v\rangle}$.

<u>משפט:</u> (תכונות הנורמה)

יהי V מרחב מ"פ (מעל $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$). אזי הנורמה מקיימת:

(א) חיוביות: $\|v\|\ge 0$ לכל $v\in V$, ושוויון אם ורק אם $v=\vec{0}$.

(ב) הומוגניות: $\|\alpha v\|=|\alpha|\cdot\|v\|$ לכל $v\in V$, $\alpha\in\mathbb{F}$.

(ג) אי-שוויון המשולש: $\|v+w\|\le\|v\|+\|w\|$ לכל $v,w\in V$, ושוויון אם ורק אם v, w ת"ל אי-שלילית, כלומר: $v=\vec{0}$, או $w=\vec{0}$, או $v=\alpha w$ כאשר $\alpha>0$ (ממשי).

<u>הוכחה:</u>

(א) נובע מיידית מחיוביות המכפלה הפנימית.

(ב) נובע מתכונות (א)+(ב) של מ"פ:

$$\|\alpha v\|^2=\langle\alpha v,\alpha v\rangle=\alpha\bar{\alpha}\langle v,v\rangle=|\alpha|^2\cdot\|v\|^2$$

(ג) נובע מאי-שוויון קושי-שוורץ:

$$\|v+w\|^2=\langle v+w,v+w\rangle=\langle v,v\rangle+\langle v,w\rangle+\langle w,v\rangle+\langle w,w\rangle$$

$$= \langle v,v\rangle + \cancel{2Re(\langle v,w\rangle)} \langle v,w\rangle + \overline{\langle v,w\rangle} + \langle w,w\rangle$$

$$= \langle v,v\rangle + 2Re(\langle v,w\rangle) + \langle w,w\rangle$$

$$\overset{Re(z)\le|z|}{\le} \langle v,v\rangle + 2|\langle v,w\rangle| + \langle w,w\rangle$$

$$\overset{\text{א״ש קושי-שוורץ}}{\le} \|v\|^2 + 2\|v\|\cdot\|w\| + \|w\|^2$$

$$= (\|v\| + \|w\|)^2$$

ע״י הוצאת שורש (אי-שלילי) $\|v+w\| \le \|v\| + \|w\|$.

אם $v=\vec{0}$ או $w=\vec{0}$ אז, כמובן, יש שוויון.

אם $v,w\neq\vec{0}$ אז שוויון מתקבל אם ורק אם יש שוויון בשני אי-השוויונות המסומנים. כידוע, $Re(z)=|z| \iff z$ ממשי אי-שלילי, וגם $|\langle v,w\rangle| = \|v\|\cdot\|w\| \iff v,w$ ת״ל, כלומר (עבור $v,w\neq\vec{0}$) $v=\alpha w$ עבור $0\neq\alpha\in F$. נקבל אז $z=\langle v,w\rangle=\alpha\langle w,w\rangle$, ולכן z ממשי אי-שלילי $\iff \alpha$ ממשי אי-שלילי (חיובי). □

הגדרנו אורך. מה לגבי <u>זווית</u>?

<u>הגדרה:</u> יהי V מרחב מ״פ מעל $\underline{F=\mathbb{R}}$, ויהיו $v,w\in V$ שונים מ-$\vec{0}$. <u>הזווית</u> $\theta=\measuredangle(v,w)$ מוגדרת (בתחום $0\le\theta\le\pi$) ע״י:

$$\cos\theta = \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\cdot\|w\|}$$

<u>הערות:</u>

* ההגדרה אפשרית, כי לפי א״ש קושי-שוורץ אגף ימין הוא מספר ממשי בין -1 ל-1, כלומר: קוסינוס של זווית θ (יחידה, בתחום $0\le\theta\le\pi$).
* אין טעם להגדיר $\measuredangle(v,w)$ כאשר $v=\vec{0}$ או $w=\vec{0}$.
* עבור $F=\mathbb{C}$, בדרך כלל לא מגדירים זווית בין וקטורים (אלא אם $\langle v,w\rangle$ ממשית). ~~מקרים~~
* זוויות מיוחדות:

$$\left.\begin{array}{l} \theta=0 \ \ :(\cos\theta=1) \quad v=\alpha w \ \text{כאשר}\ \alpha>0. \\ \theta=\pi=180^\circ \ \ :(\cos\theta=-1) \quad v=\alpha w \ \text{כאשר}\ \alpha<0. \end{array}\right\}\ \text{שוויון בא״ש קושי-שוורץ}$$

$\theta=\frac{\pi}{2}=90^\circ$: $(\cos\theta=0)$ $\underline{\langle v,w\rangle=0}$, רושמים: $v\perp w$ (v,w <u>ניצבים</u>).