# מערך תרגול 5

## 1 פרמטריזציית אורך הקשת

**תזכורת 1** אורך העקומה $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ הוא $\int_a^b |\alpha'(t)|dt$.

**דוגמא 1** היקף מעגל היחידה $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$ כאשר $t \in [0, 2\pi]$ הוא

$$\int_0^{2\pi} |(-\sin t, \cos t)|dt = \int_0^{2\pi} (-\sin t)^2 + (\cos t)^2 dt = 2\pi$$

אורך העקומה $\beta(t) = (\cos t, \sin t)$ כאשר $t \in [0, 4\pi]$ הוא באותו האופן $4\pi$. פרמטריזציה זו היא סיבוב פעמיים סביב המעגל לכן קיבלנו אורך כפול.

**תזכורת 2** נאמר שהפרמטריזציה $\alpha(s) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ היא פרמטריזציית מהירות יחידה או פרמטריזציית אורך קשת אם $|\alpha'(s)| = 1$ לכל $s$.

**תרגיל 1**

1. מיצאו פרמטריזציה לקטע הקו הישר המחבר בין $(1,2,3)$ ו־ $(4,6,8)$.
2. מה אורך הקטע?
3. מיצאו פרמטריזצית אורך קשת.

**פתרון 1**

1. $\alpha(t) = (1,2,3) + t((4,6,8) - (1,2,3)) = (1,2,3) + t(3,4,5)$ עבור $0 \le t \le 1$.
2. ברור כי אורך הקטע הוא $|(4,6,8) - (1,2,3)| = |(3,4,5)| = \sqrt{50}$
שימו לב בנוסף כי
$$\int_0^1 |\alpha'(t)|dt = \int_0^1 |(3,4,5)|dt = |(3,4,5)| = \sqrt{50}$$
3. $$s(t) = \int_0^t \left|\frac{d\alpha}{d\tau}\right| d\tau = \int_0^t |(3,4,5)|d\tau = \int_0^t \sqrt{50} d\tau = t\sqrt{50}$$
לכן $t(s) = \frac{s}{\sqrt{50}}$ כלומר $\beta(s) = \alpha(t(s)) = \alpha(\frac{s}{\sqrt{50}}) = (1,2,3) + \frac{s}{\sqrt{50}}(3,4,5)$.

**תרגיל 2** מיצאו פרמטריזציית אורך קשת עבור ההליקס $\alpha(t) = (a\cos wt, a\sin wt, bt)$.

**פתרון 2** $\alpha'(t) = (-aw\sin wt, aw\cos wt, b)$ לכן $|\alpha'(t)| = \sqrt{a^2w^2 + b^2}$. לכן אורך הקשת הוא

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2w^2 + b^2} d\tau = t\sqrt{a^2w^2 + b^2}$$

כלומר אם נסמן $c = \frac{1}{\sqrt{a^2w^2+b^2}}$ נקבל

$$t(s) = \frac{s}{\sqrt{a^2w^2 + b^2}} = cs$$

כלומר

$$\beta(s) = \alpha(t(s)) = \alpha(cs) = (a\cos wcs, a\sin wcs, bcs)$$

בדיקה:

$$|\beta'(s)| = |c(-aw\sin wcs, aw\cos wcs, b)| = 1$$

## 2 עקמומיות

**תזכורת 3**

1. העקמומיות של עקומה $\alpha(s)$ במהירות יחידה היא $|\alpha''(s)|$.
2. בעתיד נראה נוסחא לעקמומיות עבור עקומה בפרמטריזציה כלשהי.
3. העקמומיות שווה ל- $\frac{1}{r}$ באשר $r$ הרדיוס של המעגל הנושק (האוסקולטורי) בנקודה.
4. עבור עקומה מישורית הנתונה ע"י המשוואה $F(x,y)=0$ עם $\nabla F \neq 0$ העקמומיות היא

$$\frac{|D_B(F)|}{|\nabla F|^3}$$

באשר

$$D_B(F) = F_{xx}F_yF_y - 2F_{xy}F_yF_x + F_{yy}F_xF_x$$

5. אם $c$ נקודה קריטית של $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ אז העקמומיות של הגרף של $f$ בנקודה $(c,f(c))$ שווה ל- $|f''(c)|$.

**תרגיל 3** מיצאו עקמומיות עבור ההליקס $\alpha(t) = (a\cos wt, a\sin wt, bt)$.

**פתרון 3** בתרגיל לעיל מצאנו פרמטריזצית אורך קשת:

$$\beta(s) = (a\cos wcs, a\sin wcs, bcs)$$

באשר $c = \frac{1}{\sqrt{a^2w^2+b^2}}$.
כעת צריך למצוא את $|\beta''(s)|$. ראינו כי

$$\beta'(s) = c(-aw\sin wcs, aw\cos wcs, b)$$

לכן

$$\beta''(s) = -w^2c^2a(\cos wcs, \sin wcs, 0)$$

כלומר

$$|\beta''(s)| = w^2c^2|a| = \frac{|a|w^2}{a^2w^2+b^2}$$

עקמומיות קבועה. בפרט עבור $a=b=w=1$ נקבל $k_\beta(s) = \frac{1}{2}$.
לצייר.

**תרגיל 4** מיצאו עקמומיות עבור האליפסה $F(x,y) = ax^2+by^2-1=0$ כאשר $a,b>0$.

**פתרון 4**

$$\nabla F = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ax \\ 2by \end{pmatrix}$$

לכן

$$|\nabla F|^3 = \left(2\sqrt{(ax)^2+(by)^2}\right)^3 = 8\left((ax)^2+(by)^2\right)^{\frac{3}{2}}$$

כמו כן
$$|D_B(F)| = 2a(2by)^2 + 2b(2ax)^2 = 8ab(ax^2+by^2) = 8ab$$
המעבר האחרון בגלל שעל העקומה שלנו $ax^2+by^2=1$. לכן העקמומיות היא
$$\frac{|D_B(F)|}{|\nabla F|^3} = \frac{ab}{((ax)^2+(by)^2)^{\frac{3}{2}}}$$
למשל עבור מעגל ברדיוס 1 כלומר $a=b=1$ נקבל כמובן
$$k_C = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 1$$

**תרגיל 5** מיצאו את העקמומיות של העקומה הנתונה ע"י $\gamma(t) = (1+2\cos t, -3+2\sin t), 0 \le t \le \pi$.

**פתרון 5** $\gamma'(t) = (-2\sin t, 2\cos t)$ לכן $|\gamma'(t)| = \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t} = 2$.
נחשב אורך קשת
$$s(t) = \int_0^t |\gamma'(\tau)| d\tau = \int_0^t 2d\tau = 2t$$
לכן $t(s) = \frac{s}{2}$ כלומר פרמטריזצית מהירות יחידה היא $\alpha(s) = \gamma(t(s)) = \gamma(\frac{s}{2}) = (1+2\cos\frac{s}{2}, -3+2\sin\frac{s}{2})$.
כעת נוכל לחשב עקמומיות:
$$k = |\alpha''(s)| = \left|\frac{-1}{2}(\cos\frac{s}{2}, \sin\frac{s}{2})\right| = \frac{1}{2}$$

**תרגיל 6**

1. מיצאו נקודה או נקודות (אם קיימות) של עקמומיות מקסימלית על העקומה $x+y^2=1$.
2. מה בדבר נקודות בהן העקמומיות מינימאלית?

**פתרון 6**

1. $F(x,y) = x+y^2-1$ לכן
$$|\nabla F|^3 = \left|\begin{pmatrix}1\\2y\end{pmatrix}\right|^3 = (1+4y^2)^{\frac{3}{2}}$$
נחשב את אופרטור בייטמן
$$F_x = 1, F_y = 2y, F_{xx} = 0, F_{yy} = 2, F_{xy} = F_{yx} = 0$$
כלומר $D_B(F) = F_{yy}F_xF_x = 2$ וסה"כ מקבלים שהעקמומיות היא
$$\frac{2}{(1+4y^2)^{\frac{3}{2}}}$$
כדי למצוא את העקמומיות המקסימלית ניתן לגזור פונקציה זו ולהשוות ל־0. דרך יותר מהירה היא לשים לב שהמכנה מינימאלי כאשר $y=0$. כלומר נקודה עם עקמומיות מקסימלית היא $(1,0)$.

2.
$$k = \frac{2}{(1+4y^2)^{\frac{3}{2}}}$$
העקמומיות שואפת ל־0 כאשר $y$ הולך וגדל (בשני הכיוונים). יחד עם זאת העקמומיות 0 לא מתקבלת באף נקודה. (לצייר ציור)

**תרגיל 7** מיצאו נקודה או נקודות (אם קיימות) של עקמומיות מקסימלית על העקומה $y^2-3=2xy$.

**פתרון 7** $F(x,y)=y^2-2xy-3$. לכן

$$|\nabla F|^3=(4y^2+4(y-x)^2)^{\frac{3}{2}}=(8y^2-8xy+4x^2)^3$$

נשים לב כי נוכל לפשט ביטוי זה כי על העקומה שלנו $y^2-2xy=3$ כלומר $4y^2-8xy=12$ לכן

$$|\nabla F|^3=(4x^2+4y^2+12)^{\frac{3}{2}}=8(x^2+y^2+3)^{\frac{3}{2}}$$

כעת נחשב את אופרטור בייטסן: $F_x=-2y, F_{xx}=0, F_{xy}=-2, F_y=2y-2x, F_{yy}=2, F_{yx}=-2$ כלומר

$$D_B(F)=8y^2-8y(2y-2x)=16xy-8y^2$$

שוב נוכל לפשט ביטוי זה באמצעות המשוואה המגדירה את העקומה שלנו:

$$D_B(F)=-24$$

סה"כ קיבלנו עקמומיות $\frac{3}{(x^2+y^2+3)^{\frac{3}{2}}}=\frac{|-24|}{8(x^2+y^2+3)^{\frac{3}{2}}}=k$. כעת לחישוב המקסימום על העקומה, נשים לב כי מספיק למצוא מתי המכנה קטן ביותר וזה קורה כאשר $x^2+y^2$ קטן ביותר על העקומה. נבודד את אחד המשתנים מהמשוואה המגדירה את העקומה ונציב אותו ב־$x^2+y^2$. העקומה היא $y^2-3=2xy$ לכן $x=\frac{y^2-3}{2y}$.

כלומר רוצים למצוא מינימום לביטוי $y^2+\frac{(y^2-3)^2}{4y^2}=(\frac{y^2-3}{2y})^2+y^2$.

נסמן $z=y^2$, אז רוצים למצוא מינימום ל־

$$g(z)=\frac{(z-3)^2}{4z}+z=\frac{z^2-6z+9}{4z}+z=\frac{z}{4}-\frac{3}{2}+\frac{9}{4z}+z$$

נשווה את הנגזרת לאפס $g'(z)=\frac{5}{4}-\frac{9}{4z^2}=0$ ונקבל $z=\frac{3}{\sqrt{5}}$. קל לראות שזו אכן נקודת מינימום למשל ע"י נגזרת שניה.

בחזרה למשתנה $y$: $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{5}}$ ואת $x$ ניתן למצוא מהצבה ב־ $x=\frac{y^2-3}{2y}$.