

תרגיל בית 7

1. ציינו לכל אחד מהיחסים הבאים אם הוא רפלקסיבי סימטרי או טרנזיטיבי.
אם מדובר ביחס שקילות מצאו את מחלקות השקילות שלו.

א. $R_1 = \{(a,b) | a,b \in \mathbb{N}, a < b\}$

ב. $R_2 = \{(a,b) | a,b \in \mathbb{N}, a \leq b\}$

ג. $R_3 = \{(a,b) | a,b \in \mathbb{N}, a = b\}$

2. נתונה הקבוצה A ואוסף תת-קבוצות שלה $A_1, A_2, \dots, A_n$ נגדיר יחס R על A ע"י: $R = \{(x,y) : y \in A_i \text{ וגם } x \in A_i \text{ עבור } i \text{ קיים}\}$.
הוכח או הפרך:

א. $R \Leftarrow \bigcup_{i=1}^n A_i = A$ רפלקסיבי.

ב. $\bigcup_{i=1}^n A_i = A \Leftarrow R$ רפלקסיבי.

ג. לכל $1 \leq i < j \leq n$ מתקיים: $R \Leftarrow A_i \cap A_j = \emptyset$ רפלקסיבית.

ד. R טרנזיטיבי $\Leftarrow$ לכל $1 \leq i < j \leq n$ מתקיים: $A_i \cap A_j = \emptyset$.

3. עבור כל אחד מהיחסים הבאים המוגדרים מעל $\mathbb{R}$ (הממשיים) קבע האם הוא יחס שקילות:

א. $|x-y| < 1 \Leftrightarrow xRy$

ב. $x-y < 1 \Leftrightarrow xSy$

ג. $x-y < -1 \Leftrightarrow xTy$

4. נתונות הקבוצות $A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 4, 5\}$.

א. תנו דוגמה ליחס שקילות E מעל A .

ב. תנו דוגמה ליחס שקילות F מעל B .

ג. השתמשו בסעיפים א, ב ורשמו את כל איברי הקבוצה

$$G = \{((a_1, b_1), (a_2, b_2)) | (a_1, a_2) \in E, (b_1, b_2) \in F\}$$

5. יהי E יחס שקילות על קבוצה A , ויהי F יחס שקילות על קבוצה B . תהי $G = \{((a_1, b_1), (a_2, b_2)) | (a_1, a_2) \in E, (b_1, b_2) \in F\}$.
הוכח כי G הוא יחס שקילות על $A \times B$.

6. A קבוצה. יהיו S ו- R יחסי שקילות על A . הוכח או תן דוגמא נגדית לטענות הבאות:

- א. $R \cup S$ יחס שקילות.
- ב. $(A \times A) \setminus R$ יחס שקילות.
- ג. $(A \times A) \setminus R \cup I_A$ יחס שקילות.
- ד. $R \setminus S$ יחס שקילות.

7. נגדיר יחס S על $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ באופן הבא:
 לכל $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ מתקיים $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in S \leftrightarrow x_1 = x_2$
 א. הוכיחו ש S הוא יחס שקילות.
 ב. רשמו שלושה איברים במחלקת השקילות $[(1, -3)]_S$.
 ג. מה המשמעות הגיאומטרית של מחלקת השקילות $[(a, b)]_S$ כאשר $a, b \in \mathbb{R}$.

8. נגדיר יחס S מעל הקבוצה $\mathbb{N}$ באופן הבא:
 לכל $a, b \in \mathbb{N}$ מתקיים $(a, b) \in S \leftrightarrow \left\lfloor \frac{7}{a} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{7}{b} \right\rfloor$ (עגול למטה)
 א. הוכיחו כי S יחס שקילות מעל $\mathbb{N}$.
 ב. מצאו (כתבו בצורה מפורשת) את כל מחלקות השקילות השונות של $\mathbb{N}$ לגבי יחס השקילות S .
 ג. מהי החלוקה של $\mathbb{N}$ המושרית ע"י יחס השקילות S ?
 ד. רשמו את $\mathbb{N}$ כאיחוד הקבוצות בחלוקה.