נכתב על ידי יהונתן רגב

החבורה החופשית

תזכורת

בהרצאה הקודמת הגדרנו שתי חבורות חשובות:

1. S_n – החבורה הסימטרית.
2. $\mathbb{F}_n$ – החבורה החופשית.

תזכורת

תהי X קבוצה.

החבורה $\mathbb{F}_X$ נקראת החבורה החופשית על X.

איברי החבורה הם מילים באותיות $X \cup X^{-1}$.

הפעולה היא הדבקה.

לכל $x \in X$, מתקיים:

$$xx^{-1} = 1$$
$$x^{-1}x = 1$$

תזכורת

ייצוג בעזרת יוצרים ויחסים.

למשל:

$$\langle x, y \mid x^n = y^2 = (xy)^2 = 1 \rangle$$

x, y נקראים יוצרים.

$x^n = y^2 = (xy)^2 = 1$ נקראים יחסים.

סימון

תת-החבורה הנוצרת על-ידי S מסומנת:

$$\langle S \rangle$$

תת-החבורה הנורמלית הנוצרת על-ידי S מסומנת:

$$\langle\langle S \rangle\rangle$$

תת-חבורה זו מוגדרת על-ידי:

$$\langle\langle S\rangle\rangle \quad := \quad \langle gsg^{-1} \mid g\in G,\ \ s\in S\rangle$$

הערה

מתקיים:

$$\langle x,y \mid x^n = y^2 = (xy)^2 = 1\rangle \quad \cong \quad {\langle x,y\rangle}\big/{\langle\langle x^n, y^2, (xy)^2\rangle\rangle}$$

דוגמה

1. מתקיים:

$$\langle x\rangle \quad \cong \quad \mathbb{Z}$$

2. מתקיים:

$$\langle x,y\rangle \quad \cong \quad \mathbb{F}_2$$

3. מתקיים:

$$\langle x \mid x^n = 1\rangle \quad \cong \quad \mathbb{Z}_n$$

4. מתקיים:

$$\langle x,y \mid x^n = y^2 = xyxy = 1\rangle \quad \cong \quad \mathrm{D}_n$$

$$\blacksquare$$

הגדרה

חבורת המשולש מוגדרת על-ידי:

$$\Delta_{n,m,\ell} \quad := \quad \left\langle x,y \,\middle|\, x^n = y^m = (xy)^\ell = 1\right\rangle$$

הערה

מתקיים:

$$\begin{aligned}\Delta_{n,m,\ell} \quad &= \quad \left\langle x,y \,\middle|\, x^n = y^m = (xy)^\ell = 1\right\rangle \\ &\overset{\substack{x\mapsto y\\ y\mapsto x}}{\cong} \quad \left\langle x,y \,\middle|\, x^n = y^m = (xy)^\ell = 1\right\rangle \\ &\cong \quad \Delta_{m,n,\ell}\end{aligned}$$

■

הערה

מתקיים:

$$\begin{aligned}\Delta_{n,m,\ell} &= \left\langle x,y \,\middle|\, x^{n}=y^{m}=(xy)^{\ell}=1\right\rangle \\ &\overset{y\longmapsto x^{-1}y}{\cong} \left\langle x,y \,\middle|\, x^{n}=(x^{-1}y)^{m}=y^{\ell}=1\right\rangle \\ &\overset{x\longmapsto x^{-1}}{\cong} \left\langle x,y \,\middle|\, x^{n}=(xy)^{m}=y^{\ell}=1\right\rangle \\ &\cong \Delta_{n,\ell,m}\end{aligned}$$

■

דוגמה

1. מתקיים:

$$\begin{aligned}\Delta_{n,2,2} &= \langle x,y \mid x^{n}=y^{2}=(xy)^{2}=1\rangle \\ &\cong \mathrm{D}_{n}\end{aligned}$$

מתקיים:

$$\left|\Delta_{n,2,2}\right| = 2n$$

2. מתקיים:

$$\begin{aligned}\Delta_{3,3,2} &= \langle x,y \mid x^{3}=y^{3}=(xy)^{2}=1\rangle \\ &\cong \mathrm{A}_{4}\end{aligned}$$

מתקיים:

$$\left|\Delta_{3,3,2}\right| = 12$$

3. מתקיים:

$$\begin{aligned}\Delta_{3,4,2} &= \langle x,y \mid x^{3}=y^{4}=(xy)^{2}=1\rangle \\ &\cong \mathrm{S}_{4}\end{aligned}$$

מתקיים:

$$\left|\Delta_{3,4,2}\right| = 24$$

4. מתקיים:

$$\Delta_{3,5,2} = \langle x,y \mid x^3 = y^5 = (xy)^2 = 1\rangle \cong A_5$$

מתקיים:

$$\left|\Delta_{3,5,2}\right| = 60$$

5. מתקיים:

$$\Delta_{3,6,2} = \langle x,y \mid x^3 = y^6 = (xy)^2 = 1\rangle$$

מתקיים:

$$\left|\Delta_{3,6,2}\right| = \infty$$

■

הגדרה

פאונים אפלטוניים:

פאון	צלעות בפאה	פאות	קודקודים	צלעות	צלעות בקודקוד
ארבעון	3	4	4	6	3
תמנון	3	8	6	12	4
קובייה	4	6	8	12	3
תריסריון	5	12	20	30	3
עשרימון	3	20	12	30	5

טענה

$\Delta_{3,6,2}$ אינסופית.

הוכחה

ניתן לרצף את המישור במשושים, משולשים וריבועים, כך שסביב כל משושה שישה משולשים ושישה ריבועים, סביב כל משולש שלושה משושים ושלושה ריבועים, וסביב כל ריבוע שני משושים ושני משלושים.

מכל קודקוד יוצא חץ יחיד המהווה צלע במשושה וחץ יחיד המהווה צלע במשולש.

נסמן: X^0 – קבוצת הקודקודים בציור.

שני החצים היוצאים מכל קודקוד מגדירים פונקציות:

$$x, y: \quad X^0 \quad \to \quad X^0$$

מתקיים:

$$x^6 \quad = \quad y^3 \quad = \quad (xy)^2 \quad = \quad 1$$

למעשה, בנינו הומומורפיזם:

$$\Delta_{3,6,2} \quad \to \quad S_{X^0}$$

הגרף קשיר, לכן לכל קודקוד קבוע e, ולכל קודקוד u, קיים $\sigma \in \Delta_{3,6,2}$ כך ש:

$$\sigma\,(e) \quad = \quad u$$

לכן:

$$\begin{aligned} |\Delta_{3,6,2}| \quad &\geq \quad X^0 \\ &= \quad \infty \end{aligned}$$

■