פתרון תרגיל 1 גיאומטריה אנליטית ודיפרנציאלית

תשע"ז

21 במרץ 2017

1. נרשום לפי סכימת איינשטיין:

(א) $a^i_{\ j} b^j_{\ k} c^k_{\ l} = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 a^i_{\ j} b^j_{\ k} c^k_{\ l}$, כלומר:

$$= a^i_{\ 1} b^1_{\ 1} c^1_{\ l} + a^i_{\ 1} b^1_{\ 2} c^2_{\ l} + a^i_{\ 1} b^1_{\ 3} c^3_{\ l} +$$

$$+ a^i_{\ 2} b^2_{\ 1} c^1_{\ l} + a^i_{\ 2} b^2_{\ 2} c^2_{\ l} + a^i_{\ 2} b^2_{\ 3} c^3_{\ l} +$$

$$+ a^i_{\ 3} b^3_{\ 1} c^1_{\ l} + a^i_{\ 3} b^3_{\ 2} c^2_{\ l} + a^i_{\ 3} b^3_{\ 3} c^3_{\ l}$$

מכיוון שהאינדקסים שנמצאים גם למעלה וגם למטה הם i, j.

(ב) $a_{ij} v^i v^j = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} v^i v^j$, כלומר:

$$= a_{11} v^1 v^1 + a_{12} v^1 v^2 + a_{13} v^1 v^3 +$$

$$+ a_{21} v^2 v^1 + a_{22} v^2 v^2 + a_{23} v^2 v^3 +$$

$$+ a_{31} v^3 v^1 + a_{32} v^3 v^2 + a_{33} v^3 v^3$$

(ג) $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\delta_{ij}a^{ij}=\delta_{ij}a^{ij}$, ומהגדרת הדלתא של קרונקר:

$$=a^{11}+a^{22}+a^{33}$$

2. העקבה היא סכום איברי האלכסון, כידוע.

נסמן: $AB=C,BA=D$

לכן:

$$tr\left(AB\right)=d_{i}^{i}=a_{\ j}^{i}b_{\ i}^{j}=b_{\ i}^{j}a_{\ j}^{i}=c_{j}^{j}=tr\left(BA\right)$$

3. נראה אחד מהצדדים; הצד השני דומה.

נסמן: $B+C=D,AB=E,BC=F,A\left(B+C\right)=G,AB+BC=H$.

$$g_{\ j}^{i}=a_{\ k}^{i}d_{\ j}^{k}=a_{\ k}^{i}\left(b_{\ j}^{k}+c_{\ j}^{k}\right)=a_{\ k}^{i}b_{\ j}^{k}+a_{\ k}^{i}c_{\ j}^{k}=$$

$$=e_{\ j}^{i}+f_{\ j}^{i}=g_{\ j}^{i}$$

מכיוון שהמטריצות שוות איבר־איבר, הן שוות.

4. מתקיים:

$$\delta_{j}^{i}\delta_{k}^{j}\delta_{i}^{k}=\delta_{j}^{i}\delta_{i}^{j}=\delta_{i}^{i}=n$$

אפשר לפתור גם באופן הבא:

$\delta_{j}^{i}\delta_{k}^{j}\delta_{i}^{k}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\delta_{j}^{i}\delta_{k}^{j}\delta_{i}^{k}$.

מחובר כללי בסכום לא מתאפס כאשר $i=j=k$, ואז המחובר שווה ל־1.

זה מתרחש בדיוק n פעמים (כאשר $i=j=k=l$ לכל $1\leq l\leq n$), ולכן הסכום הוא n.