פתרון תרגיל 3 מבוא לתורת החבורות תשע"ט

שאלה 1. תהי G חבורה. יהיו $a,b\in G$ איברים שמתחלפים (כלומר $ab=ba$). הוכיחו כי $\langle a,b\rangle$ חבורה אבלית.

פתרון. מפני ש-$ab=ba$, אז כל איבר בתת-החבורה $\langle a,b\rangle$ אפשר להציג כ-a^mb^n עבור $m,n\in\mathbb{Z}$.

יהיו שני איברים $a^ib^j,a^kb^l\in\langle a,b\rangle$. מתקיים:

$$a^ib^ja^kb^l=a^{i+k}b^{j+l}=a^kb^la^ib^j$$

כי a ו-b מתחלפים. כלומר כל זוג איברים ב-$\langle a,b\rangle$ מתחלף, ולכן זו חבורה אבלית.

שאלה 2. תהי G חבורה, ונסמן ב-T את אוסף האיברים מסדר סופי. הוכיחו או הפריכו:

א. T תת-חבורה של G.

ב. $G\backslash T$ תת-חבורה של G.

פתרון. א. הפרכה. נתבונן בחבורה $GL_2(\mathbb{R})$. שני האיברים:

$$a=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\ \ b=\begin{pmatrix}0&1\\-1&-1\end{pmatrix}$$

הם מסדר סופי: $a^4=b^3=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ (בדקו), אך המכפלה היא:

$$ab=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

וזהו איבר מסדר אינסופי, כלומר הקבוצה T לא סגורה לפעולה ולכן אינה תת-חבורה.

ב. הפרכה, עם אותה הדוגמה כמו מקודם. ניקח את האיבר $g=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$, מסדר אינסופי; גם g^{-1} מסדר אינסופי, אך המכפלה היא: $gg^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, מסדר סופי. לכן $G\backslash T$ לא סגורה לפעולה ולא תת-חבורה.

שאלה 3. הוכיחו שהחבורות הבאות אינן נוצרות סופית.

א. $(M_3(\mathbb{R}),+)$.

ב. $(\mathbb{Q}\backslash\{0\},\cdot)$.

פתרון. א. הסתכלו בעמוד 18 בחוברת מערכי התרגול של מבוא לתורת החבורות.

ב. כנ"ל. הציצו מדי פעם גם בשתי החוברות האחרות, לא יזיק.

שאלה 4. הוכיחו שכל תת-חבורה של חבורה ציקלית היא גם ציקלית.

פתרון. תהי G ציקלית ותהי $H \leq G$ תת־חבורה. נסמן $G = \langle a \rangle$. כל האיברים ב-G הם מהצורה a^i, ולכן גם כל האיברים ב-H הם מהצורה הזו.

יהי $s \in \mathbb{N}$ המספר המינימלי שעבורו $a^s \in H$. נרצה להוכיח $H = \langle a^s \rangle$. אכן, יהי $k \in \mathbb{N}$ שעבורו $a^k \in H$. אם נחלק עם שארית, נקבל שקיימים q ו-r שעבורם $k = qs + r$, $0 \leq r < s$. לכן,

$$a^k = a^{qs+r} = a^{qs} \cdot a^r = (a^s)^q \cdot a^r$$

במילים אחרות, $a^r = a^k \cdot (a^s)^{-q}$. אבל $a^s, a^k \in H$, ולכן גם $a^r \in H$ (סגירות לכפל ולהופכי).

אם $r \neq 0$, קיבלנו סתירה למינימליות של s – כי $a^r \in H$ וגם $0 < r < s$ (לפי בחירת r). לכן, $r = 0$. כלומר, $k = qs$, ומכאן $s|k$. לכן $a^k \in \langle a^s \rangle$, כדרוש.

שאלה 5. תהי G חבורה סופית. הוכיחו ש-G ציקלית אם ורק אם קיים $a \in G$ המקיים: $o(a) = |G|$.

פתרון.

ראשית, נסמן: $|G| = n$.

לכיוון הראשון, נניח ש-G ציקלית, כלומר קיים $a \in G$ כך ש: $G = \langle a \rangle$. מכיוון שהחבורה סופית, אפשר לרשום: $G = \left\{e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\right\}$, ואנו מקבלים שאכן $o(a) = n$.

מצד שני, אם $o(a) = n$, האיברים $e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}$ כולם שונים זה מזה. יש פה בדיוק $n = |G|$ איברים, ולכן $G = \left\{e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\right\}$. כעת, $G = \left\{e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\right\} \subseteq \langle a \rangle$ ומצד שני $\langle a \rangle \subseteq G$ ובסה"כ:

$$G = \langle a \rangle$$

כנדרש.