אלגברה מופשטת 1, תרגיל בית 4

מתרגלים: סולי וישקאוצין ואדם צ'פמן. להגשה ב4.12 או ב7.12 בהתאם לשיעור התרגיל.

1) חשבו את הסדר של 5 בU_{14}.

פיתרון:

$5^2 \equiv 11 \pmod{14}$, $5^3 \equiv 13 \pmod{14}$, $5^4 \equiv 9 \pmod{14}$,

$5^5 \equiv 3 \pmod{14}$, $5^6 \equiv 1 \pmod{14}$, כלומר $o(5)=6$.

2) תהי G חבורה סופית ויהיו $h,g \in G$ כך ש$\langle h \rangle \cap \langle g \rangle = \{e\}$.

הוכח כי אם $h^n g^m = e$ אזי $h^n = g^m = e$.

פיתרון:

נניח בשלילה כי $h^n \neq e$, אזי מכיוון ש$h^n g^m = e$, מתקיים $h^n = g^{-m}$, ולכן $h^n \in \langle g \rangle$. אולם ברור ש$h^n \in \langle h \rangle$, משמע $h^n \in \langle h \rangle \cap \langle g \rangle$, וזו סתירה ל$\langle h \rangle \cap \langle g \rangle = \{e\}$. עקב זאת, $h^n = e$ ולכן כמובן גם $g^m = e$.

3) הראה שאם $\gcd(o(h), o(g)) = 1$ אזי $\langle h \rangle \cap \langle g \rangle = \{e\}$.

פיתרון:

נניח בשלילה כי $\langle h \rangle \cap \langle g \rangle \neq \{e\}$, אזי קיימת חזקה n שעבורה $e \neq h^n \in \langle g \rangle$. כעת מצד אחד $1 \neq o(h^n) \mid |\langle g \rangle| = o(g)$ ומצד שני $o(h^n) \mid o(h)$ ולכן $o(h^n) \mid \gcd(o(g), o(h))$ בסתירה לכך ש$\gcd(o(h), o(g)) = 1$.

4) הראו ש $\varphi : G \to H$ (בהנחה ש $\varphi(e_G) = e_H$) הוא הומומורפיזם אם ורק אם מתקיים: $abc = e_G \Rightarrow \varphi(a)\varphi(b)\varphi(c) = e_H \quad \forall a,b,c \in G$.

פיתרון:

$(\Leftarrow)$

יהי $\varphi : G \to H$ הומומורפיזם. יהיו $a,b,c \in G$. אזי

$\varphi(abc) = \varphi((ab)c) = \varphi(ab)\varphi(c) = (\varphi(a)\varphi(b))\varphi(c) = \varphi(a)\varphi(b)\varphi(c)$.

בפרט, אם $abc = e_G$ אזי $\varphi(a)\varphi(b)\varphi(c) = \varphi(abc) = \varphi(e_G) = e_H$.

$(\Rightarrow)$

נתון כי $abc = e_G \Rightarrow \varphi(a)\varphi(b)\varphi(c) = e_H \quad \forall a,b,c \in G$ וכי $\varphi(e_G) = e_H$. יהיו $a,b \in G$, אזי $ab(ab)^{-1} = e_G$ ולכן $e_H = \varphi(a)\varphi(b)\varphi((ab)^{-1})$. אי-לכך $\varphi(a)\varphi(b) = (\varphi((ab)^{-1}))^{-1}$. נותר להוכיח כי $(\varphi(x^{-1}))^{-1} = \varphi(x)$ לכל $x \in G$.

מתקיים $xx^{-1}e_G = e_G$, ולכן $\varphi(x)\varphi(x^{-1})\varphi(e_G) = e_H$, ומכיוון ש $\varphi(e_G) = e_H$, $\varphi(x) = (\varphi(x^{-1}))^{-1}$.

5) תהי פונקצייה $\phi : GL_2(R) \to GL_2(R)$ המקיימת $\phi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$. האם היא הומומורפיזם? האם היא איזומורפיזם?

פיתרון:

תהיינה שתי מטריצות $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ו $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$. המכפלה שלהן היא

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{pmatrix}.$$

$$\varphi\begin{pmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cy+dw & -cx-dz \\ -ay-bw & ax+bz \end{pmatrix}.$$

$$\varphi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix},\ \varphi\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w & -z \\ -y & x \end{pmatrix}.$$

$$\varphi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\varphi\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w & -z \\ -y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dw+cy & -dz-cx \\ -bw-ay & bz+ax \end{pmatrix}$$

כלומר מתקיים $\varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\right) = \varphi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\varphi\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$, ולכן φ הומומורפיזם.

כעת, $\varphi\circ\varphi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \varphi\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, כלומר $\varphi\circ\varphi = id$, משמע φ פונקציה הפיכה, ולכן איזומורפיזם.