אינפי 3 תרגיל 4 – פתרון

1. חשב את הנגזרת המכוונת של הפונקציה $f(x,y)$ בנקודה (x_0,y_0) בכיוון של הווקטור $\bar{u}$

$\bar{u}=2\bar{i}+3\bar{j}$,$(x_0,y_0)=(-3,0)$, $f(x,y)=xe^{xy}$

הפונקציה $f(x,y)$ גזירה בסביבת הנקודה $(-3,0)$. וקטור היחידה בכיוון של $\bar{u}$ הוא

$$\bar{e}_{\bar{u}}=(\frac{2}{\sqrt{13}},\frac{3}{\sqrt{13}})$$

נחשב את הנגזרת המכוונת לפי הנוסחה :

$$\frac{\partial f(-3,0)}{\partial \bar{u}}=\frac{\partial f(-3,0)}{\partial x}\cdot\frac{2}{\sqrt{13}}+\frac{\partial f(-3,0)}{\partial y}\cdot\frac{3}{\sqrt{13}}=$$

$$(e^{xy}+xe^{xy}\cdot y)\Big|_{(-3,0)}\cdot\frac{2}{\sqrt{13}}+xe^{xy}\cdot x\Big|_{(-3,0)}\cdot\frac{3}{\sqrt{13}}=\frac{29}{\sqrt{13}}$$

2. חשב את הנגזרת המכוונת של הפונקציה $f(x,y,z)$ בנקודה (x_0,y_0,z_0) בכיוון של הווקטור $\bar{u}$

(א) $f(x,y,z)=xy+yz^2-xz^3$, $(x_0,y_0,z_0)=(2,0,3)$, $\bar{u}=(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3})$

הפונקציה $f(x,y,z)$ גזירה בסביבת הנקודה $(2,0,3)$.

$$\|\bar{u}\|=\sqrt{(-\frac{2}{3})^2+(-\frac{1}{3})^2+(\frac{2}{3})^2}=1$$

לפי הנוסחה , נקבל :

$$\frac{\partial f(2,0,3)}{\partial \bar{u}}=\frac{\partial f(2,0,3)}{\partial x}\cdot(-\frac{2}{3})+\frac{\partial f(2,0,3)}{\partial y}\cdot(-\frac{1}{3})+\frac{\partial f(2,0,3)}{\partial z}\cdot\frac{2}{3}=$$

$$(y-z^3)\Big|_{(2,0,3)}\cdot(-\frac{2}{3})+(x+z^2)\Big|_{(2,0,3)}\cdot(-\frac{1}{3})+(2yz-3xz^2)\Big|_{(2,0,3)}\cdot\frac{2}{3}=-\frac{65}{3}$$

(ב) $f(x,y,z)=\sqrt{xyz}$, $(x_0,y_0,z_0)=(2,4,2)$, $\bar{u}=4\bar{i}+2\bar{j}-4\bar{k}$

הפונקציה $f(x,y,z)$ גזירה בסביבת הנקודה $(2,4,2)$.

וקטור היחידה בכיוון של $\bar{u}$ הוא $\bar{e}_{\bar{u}}=(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3})$

נחשב את הנגזרת המכוונת לפי הנוסחה :

$$\frac{\partial f(2,4,2)}{\partial \bar{u}}=\frac{yz}{2\sqrt{xyz}}\Big|_{(2,4,2)}\cdot\frac{2}{3}+\frac{xz}{2\sqrt{xyz}}\Big|_{(2,4,2)}\cdot\frac{1}{3}+\frac{xy}{2\sqrt{xyz}}\Big|_{(2,4,2)}\cdot(-\frac{2}{3})=\frac{1}{6}$$

3. באיזה כיוון (אם קיים, למצוא את הווקטור) קצב ההשתנות של הפונקציה $f(x,y)=x^2y+y^3$ בנקודה $(1,-1)$ שווה (א) ל-0 (ב) ל-20.

(א) דרך 1:

$$\frac{\partial f(1,-1)}{\partial \bar{u}}=\frac{\partial f(1,-1)}{\partial x}\cdot\cos\alpha+\frac{\partial f(1,-1)}{\partial y}\cdot\sin\alpha=-2\cos\alpha+4\sin\alpha=0\Rightarrow \cot an\alpha=2$$

$$\alpha=arc\cot an(2)+k\pi,\ k\in Z\Rightarrow \vec{u}=\left(\cos\left(arc\cot an(2)+k\pi\right),\sin\left(arc\cot an(2)+k\pi\right)\right)$$

דרך 2:

נסמן $\vec{u}=(a,b)$, אז

$$\frac{\partial f(1,-1)}{\partial \bar{u}}=-2\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+4\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{-2a+4b}{\sqrt{a^2+b^2}}=0\Rightarrow a=2b$$

$$\Rightarrow \vec{u}=\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}},\frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}}\right)=\left(\frac{a}{\sqrt{\frac{5}{4}a^2}},\frac{a}{2\sqrt{\frac{5}{4}a^2}}\right),\ a\in R\setminus\{0\}$$

(ב) ערך מקסימלי של נגזרת מכוונת שווה לאורך וקטור גרדיאנט בנקודה הנתונה והוא שווה ל- $\sqrt{20}$, לכן אין כיוון כזה שהנגזרת המכוונת בנקודה שווה ל- 20.

4. . לפי כלל השרשרת:

$$\frac{dw}{dt}=\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}$$

במקרה שלנו:

$$\frac{dw}{dt}=\frac{6x}{3x^2-2y+4z^3}\cdot\frac{1}{2t^{\frac{1}{2}}}-\frac{2}{3x^2-2y+4z^3}\cdot\frac{2}{3t^{\frac{1}{3}}}-\frac{12z^2}{3x^2-2y+4z^3}\cdot\frac{2}{t^3}$$

ואחרי שנציב את x,y,z כביטויים של t נקבל:

$$\frac{dw}{dt}=\frac{9t^{\frac{1}{3}}-4-72t^{-\frac{20}{3}}}{9t^{\frac{4}{3}}-6+12t^{-\frac{17}{3}}}$$

5. הפונקציות דיפרנציאביליות היכן שאנו רוצים ולכן לפי כלל השרשרת:

$$J_{g\circ f}\left(1,\frac{\pi}{4},2\right)=J_g\left(f\left(1,\frac{\pi}{4},2\right)\right)\cdot J_f\left(1,\frac{\pi}{4},2\right)$$

ולכן: $f\left(1,\frac{\pi}{4},2\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2},\sqrt{2}\right)$

$$J_g\left(f\left(1,\frac{\pi}{4},2\right)\right)=\left.\begin{pmatrix}4x^3z^2 & 0 & 2x^4z\\ 2x\ln 2y & \frac{x^2}{y} & 0\\ yz & xz & xy\end{pmatrix}\right|_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2},\sqrt{2}\right)}=\begin{pmatrix}2\sqrt{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & \frac{\sqrt{2}}{4}\end{pmatrix}$$

$$J_f\left(1,\frac{\pi}{4},2\right)=\left.\begin{pmatrix}2x\sin y & x^2\cos y & 0\\ \frac{1}{z} & 0 & -\frac{x}{z^2}\\ 0 & -z\sin y & \cos y\end{pmatrix}\right|_{\left(1,\frac{\pi}{4},2\right)}=\begin{pmatrix}\sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4}\\ 0 & -\sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$$

לכן:

$$J_{g\circ f}\left(1,\frac{\pi}{4},2\right)=\begin{pmatrix}2\sqrt{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & \frac{\sqrt{2}}{4}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4}\\ 0 & -\sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4}\\ \frac{3}{2} & 0 & 0\end{pmatrix}$$