פתרון שאלה 1

א. הצבה בפונקציה שרציפה ב-$x = 2$ ומקבלים $L = 7$

ב. הצבה בפונקציה שרציפה ב-$x = 3$ ומקבלים $L = \frac{6}{3-\sqrt{3}}$

ג. אחרי כפל בצמוד מקבלים $\frac{-1}{16(\sqrt{36-x}+6)} = \frac{-x}{16x(\sqrt{36-x}+6)}$. וכעת הצבה בפונקציה שרציפה ב-$x = 0$ ומקבלים $L = \frac{-1}{192}$.

ד. המונה שואף ל-11 $\sqrt{36} + \sqrt{9} + \sqrt{4} = 6 + 3 + 2 = 11$ (הצבה בפונקציה שרציפה ב-$x = 0$) והמכנה שואף ל-0 (שוב, הצבה בפונקציה שרציפה ב-$x = 0$) והוא תמיד חיובי (סכום של שתי חזקות זוגיות) ולכן סה"כ השבר שואף לאינסוף.

פתרון שאלה 2

א. $\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\ln(x)}}$

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\ln(x)}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln\left(x^{\frac{1}{\ln(x)}}\right)} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln(x)}{\ln(x)}} = \lim_{x\to 0^+} e = e$$

ב. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(8x^7)}{2x^4}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(8x^7)}{2x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(8x^7)}{8x^7} \frac{8x^7}{2x^4}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(8x^7)}{8x^7} \lim_{x\to 0} 4x^3 = 1 \cdot 0 = 0$$

ג.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\ln(1+\sin(x-2))}{9x-18}=\lim_{x\to 2}\frac{\ln(1+\sin(x-2))}{\sin(x-2)}\frac{\sin(x-2)}{9x-18}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{\ln(1+\sin(x-2))}{\sin(x-2)}\frac{\sin(x-2)}{x-2}\frac{1}{9}=1\cdot 1\cdot\frac{1}{9}$$
$$=\frac{1}{9}$$

ד. $\lim_{x\to 0}\frac{x^8e^{\sin(65x)}(1-\cos(x^2))}{7\sin(x^6)}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^8e^{\sin(65x)}(1-\cos(x^2))}{7\sin(x^6)}=\frac{1}{7}\lim_{x\to 0}\frac{x^8(1-\cos(x^2))}{\sin(x^6)}$$
$$=\frac{1}{7}\lim_{x\to 0}\frac{x^6}{\sin(x^6)}x^2(1-\cos(x^2))$$
$$=\frac{1}{7}\lim_{x\to 0}x^2(1-\cos(x^2))=\frac{1}{7}\cdot 0\cdot(1-0)=0$$

פתרון שאלה 3

הפונקציה וודאי רציפה לכל $x<0$, לכל $0<x<9$, ולכל $x>9$ (בכל אחת מהנקודות בכל אחד מהתחומים האלה הפונקציה מזדהה בקטע פתוח עם פונקציה אלמנטרית ובכל אחד מהתחומים תחום ההגדרה מתאים).

נשאר לבדוק רציפות בנקודות 0,9, כלומר בכל אחת מהן לבדוק מתי הגבול הדו-צדדי קיים ושווה לערך הפונקציה בנקודה.

נבדוק:

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}ax+b-6=b-6$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0^-} e^{-\frac{1}{x}}} = "\frac{1}{\infty}" = 0$$

$$f(0) = b - 6$$

כלומר כדי שהפונקציה תהיה רציפה בנקודה $x = 0$ צריך להתקיים $b - 6 = 0$ כלומר $b = 6$.

$$\lim_{x\to 9^+} f(x) = \lim_{x\to 9^+} \frac{x^2 - 8x - 9}{3 - \sqrt{x}} = \lim_{x\to 9^+} \frac{(x^2 - 8x - 9)(3 + \sqrt{x})}{9 - x}$$
$$= \lim_{x\to 9^+} \frac{(x+1)(x-9)(3+\sqrt{x})}{9 - x}$$
$$= \lim_{x\to 9^+} -(x+1)\left(3 + \sqrt{x}\right) = -60$$

$$\lim_{x\to 9^-} f(x) = \lim_{x\to 9^-} ax + b - 6 = 9a + b - 6$$

$$f(9) = 9a + b - 6$$

כלומר צריך להתקיים

$$9a + b - 6 = -60$$

כאמור $b = 6$ כלומר

$$9a = -60$$

כלומר

$$a = -\frac{60}{9} = -\frac{20}{3}$$

<u>פתרון שאלה 4</u>

האם קיים a ממשי כך שהפונקציה הבאה תהיה רציפה בכל הישר הממשי?

$$f(x) = \begin{cases} a, & x = 1 \\ \dfrac{1}{1 + e^{\frac{1}{x-1}}}, & x \neq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}} = \frac{1}{1} = 1$$

כלומר בנק' 1 הגבולות מימין ומשמאל לא שווים זה לזה (ללא תלות בערך a) לכן לא קיים ערך a עבורו הפונקציה רציפה בכל הממשיים.

<u>פתרון שאלה 5</u>

מצאו את נקודות אי-הרציפות של הפונקציות הבאות, ומיינו אותן:

א. $f(x) = e^{\frac{-1}{x^3}}$

הפונקציה אלמנטרית עם ת"ה $x \neq 0$. לכן היא רציפה לכל $x \neq 0$ ואיננה רציפה ב-$x = 0$ כי איננה מוגדרת שם.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \infty$$

הגבול משמאל לא קיים לכן נקודת אי-הרציפות היא עיקרית (סוג שני).

ב. $f(x) = \frac{|x^3+x^5+x^7|}{x^3+x^5+x^7}$

המכנה מתפרק ל-$x^3(1+x^2+x^4)$ לכן שורשי המכנה הם רק $x = 0$. לכן לכל $x \neq 0$ הפונקציה רציפה כמנה של פונקציות רציפות, ובנקודה $x = 0$ הפונקציה איננה רציפה כי היא לא מוגדרת שם.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3+x^5+x^7}{x^3+x^5+x^7} = \lim 1 = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^3-x^5-x^7}{x^3+x^5+x^7} = \lim -1 = -1$$

כלומר הגבולות החד-צדדיים קיימים ושונים זה מזה לכך לפונקציה נקודת אי-רציפות מסוג ראשון (קפיצה) בנקודה $x = 0$.

ג. $f(x) = \lfloor |x| \rfloor$ (עיגול כלפי מטה של ערך מוחלט של x)

לכל $a \notin Z$ קיימת סביבה סביב a בה לכל x מתקיים $\lfloor |a| \rfloor = \lfloor |x| \rfloor$ ולכן לכל $a \notin Z$ מתקיים $\lim_{x\to a} \lfloor |x| \rfloor = \lfloor |a| \rfloor$ כלומר $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ כלומר הפונקציה רציפה לכל $a \notin Z$. כדי למצוא כזו סביבה מפורשות פשוט ניקח את המרחק המינימלי מ-a לקצה המדרגה כלומר למשל עבור $a > 0$ נגדיר את הסביבה כך: $(a-\delta, a+\delta)$ באשר $\delta = \min(a - \lfloor a \rfloor, \lceil a \rceil - a)$.

גם עבור $a = 0$ יש סביבה סביב 0, למשל הסביבה $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, שבה $\lfloor |0| \rfloor = 0$ כי עבור $x > 0$ בסביבה זו יתקיים $\lfloor |x| \rfloor = \lfloor x \rfloor = 0$ ועבור $x < 0$ בסביבה זו יתקיים $\lfloor |x| \rfloor = \lfloor -x \rfloor = 0$. לכן הפונקציה רציפה גם ב-0.

תהי $a > 0$ נקודה שלמה, אז:

$$\lim_{x\to a^+} \lfloor |x| \rfloor = \lim_{x\to a^+} \lfloor x \rfloor = a$$

$$\lim_{x\to a^-} \lfloor |x| \rfloor = \lim_{x\to a^-} \lfloor x \rfloor = a - 1$$

כלומר הגבולות החד-צדדיים ב-a קיימים ושונים כלומר זו נקודת אי-רציפות מסוג 1 (קפיצה). באותו אופן תהי $a < 0$ נקודה שלמה, אז:

$$\lim_{x\to a^+} \lfloor |x| \rfloor = \lim_{x\to a^+} \lfloor -x \rfloor = -a$$

$$\lim_{x\to a^-} \lfloor |x| \rfloor = \lim_{x\to a^-} \lfloor -x \rfloor = -a - 1$$

כלומר גם כאן זו נקודת אי-רציפות מסוג 1.

לסיכום: הנקודות $\ldots -1, -2, -3, \ldots 1,2,3$ הן נקודות אי-רציפות מסוג 1, ובכל נקודה אחרת הפונקציה היא רציפה.

ד. $f(x) = (x^2-1)\sin(\frac{1}{x^3-x^2})$

$$\frac{1}{x^3-x^2} = \frac{1}{x^2(x-1)}$$

כלומר הפונקציה היא אלמנטרית עם ת"ה $x \neq 0,1$. לכן לכל $x \neq 0,1$ הפונקציה היא רציפה, ובנקודות $x = 0,1$ איננה רציפה כי לא מוגדרת שם.

$$\lim_{x\to 1}(x^2-1)\sin\left(\frac{1}{x^3-x^2}\right) = 0$$

(סינוס פונקציה חסומה, כפול פונקציה השואפת ל-0)

כלומר הגבול הדו-צדדי קיים, כלומר $x = 1$ היא נקודת אי-רציפות סליקה.

$$\lim_{x\to 0^+}(x^2-1)\sin\left(\frac{1}{x^3-x^2}\right)$$

הגבול לא קיים: הסוגריים השמאליים שואפים ל--1, והסינוס של הביטוי הנתון מתבדר כאשר $x \to 0^+$ (ראו הוכחה להלן. בבדיקת התרגיל הנחנו את הבודקים לא להוריד ניקוד על ההסבר של זה, וגם אל תילחצו אם אתם לא מבינים את ההוכחה עד הסוף. הנימוק יצא קצת קשה), **ולכן** סה"כ הגבול לא קיים. כלומר הגבול מימין לא קיים, לכן $x = 0$ היא נקודת אי-רציפות מסוג 2 (עיקרית).

הוכחה כי הגבול $\lim_{x\to 0^+} sin(\frac{1}{x^3-x^2})$ לא קיים:

נסמן $h(x) = \sin(\frac{1}{x^3-x^2})$. נרצה לבחור שתי סדרות $0 < x_n \to 0$, $0 < y_n \to 0$, כך ש-$\lim_{n\to\infty} h(x_n) \neq \lim_{n\to\infty} h(y_n)$.

אם נצליח לבחור סדרות $0 < x_n \to 0$, $0 < y_n \to 0$ כך ש-

$$x_n^3 - x_n^2 = \frac{-1}{2\pi n}$$

$$y_n^3 - y_n^2 = \frac{-1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$$

אז נקבל את הדרוש. (ראו להלן מדוע בחרנו דווקא -1 במונה ולא 1)

<u>**טענת עזר:**</u> עבור כל סדרה $0 < \epsilon_n \to 0$, למשוואות $t^3 - t^2 = -\epsilon_n$ קיימים (החל ממקום מסוים) פתרונות t_n בהתאמה, המקיימים $0 < t_n \to 0$.

הוכחה: נסמן $g(x)=x^3-x^2$. נשים לב כי $g(0)=0$, וכן

$$g\left(\sqrt{2\epsilon_n}\right)=\left(\sqrt{2\epsilon_n}\right)^3-\left(\sqrt{2\epsilon_n}\right)^2<\frac{1}{2}\left(\sqrt{2\epsilon_n}\right)^2-\left(\sqrt{2\epsilon_n}\right)^2=$$

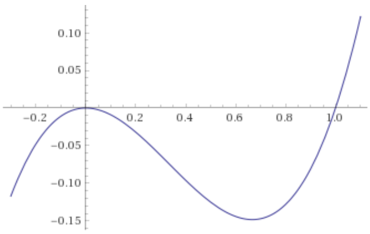
$$=-\frac{1}{2}\left(\sqrt{2\epsilon_n}\right)^2=-\epsilon_n$$

(המעבר השני נכון החל ממקום אשר ממנו $\sqrt{2\epsilon_n}<\frac{1}{2}$, ומקום כזה אכן קיים כי $\epsilon_n\to 0$)

לסיכום, $g\left(\sqrt{2\epsilon_n}\right)<-\epsilon_n$, $g(0)=0>-\epsilon_n$, והפונקציה $g(x)$ רציפה, לכן לפי משפט ערך הביניים קיים $0<t_n<\sqrt{2\epsilon_n}$ כך ש-$g(t_n)=-\epsilon_n$. לפי משפט הסנדוויץ' $t_n\to 0$, כדרוש. **מש"ל טענת עזר.**

לכן, אכן ניתן לבחור את הסדרות x_n,y_n שרצינו לבחור, לפי שימוש בטענה עם $\epsilon_n=\frac{1}{2\pi n}$ עבור x_n, ועם $\epsilon_n=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}$ עבור y_n. **מש"ל הוכחה שהגבול לא קיים.**

דרך אגב 1: אם היינו מנסים לבחור סדרה המקיימת



$$x_n^3-x_n^2=\frac{1}{2\pi n}$$

לא היינו מצליחים למצוא כזו עם $0<x_n\to 0$, ולכן בחרנו דווקא -1 במונה. את הסיבה שלא היינו מצליחים למצוא כזו ניתן לראות מהגרף של $g(x)$, אשר קל לצייר לפי חקירה: הנקודות בהן הפונקציה מקבלת ערכי y חיוביים וקטנים הן לא קרובות ל-0 (בעוד עבור ערכי y שליליים וקטנים כן קיימים ערכי x אשר קרובים ל-0 שתמונתם ערכי y אלה).

דרך אגב 2: איך ידענו לבחור $g\left(\sqrt{2\epsilon_n}\right)$? כי עבור x-ים מספיק קטנים מתקיים

$$g(x)=x^3-x^2<\frac{1}{2}x^2-x^2=-\frac{1}{2}x^2$$

אנחנו רוצים שמה שרשום בצד ימין יהיה שווה ל- $-\epsilon_n$, וע"י העברת אגפים מוצאים $x=\sqrt{2\epsilon_n}$.

שאלה: מדוע לא ניתן לומר כי פשוט בגלל ש-$g(x)\to-\infty$ כאשר $x\to 0^+$ אז הגבול של $\sin(g(x))$ כאשר $x\to 0^+$ לא קיים, הרי $y=\sin(x)$ פונקציה מחזורית, והרי אפילו הוכחנו כי הגבול $\lim_{x\to-\infty}\sin(x)$ לא קיים?

תשובה: כי ייתכנו פונקציות $g(x)$ ששואפות ל-$-\infty$ למשל דווקא דרך כפולות שלמות של 2π (ואז ערך הסינוס הוא 0, והגבול כן יצא קיים). למשל עבור $g(x)=-2\pi\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor$ מקבלים כי הגבול של $\sin(g(x))$ כאשר $x\to 0^+$ הוא 0.

ה. $f(x)=\frac{1+x}{1+x^3}$

זו פונקציה אלמנטרית עם ת"ה $x\neq-1$ כלומר הפונקציה רציפה לכל $x\neq-1$ ואיננה רציפה עבור $x=-1$ כי איננה מוגדרת שם.

$$\lim_{x\to-1}\frac{1+x}{1+x^3}=\lim_{x\to-1}\frac{1+x}{(1+x)(1-x+x^2)}=\lim_{x\to-1}\frac{1}{1-x+x^2}=\frac{1}{3}$$

(את הפירוק של המכנה מצאנו לפי הנוסחא
$(a=1, b=-x$ עם $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$)

כלומר הגבול הדו-צדדי קיים לכן הנקודה $x=-1$ היא אי-רציפות סליקה.

ו. $f(x)=\frac{\sin(x)}{|x|}$

לכל $x\neq 0$ מדובר בפונקציה רציפה כמנה של פונקציות רציפות. עבור $x=0$ הפונקציה לא מוגדרת ולכן לא רציפה.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(x)}{|x|}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(x)}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin(x)}{|x|}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin(x)}{-x}=-\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin(x)}{x}=-1$$

הגבולות החד-צדיים קיימים ושונים כלומר $x=0$ נקודת אי-רציפות מסוג 1 (קפיצה).

<u>פתרון שאלה 6</u>

מתקיים $f(2)=f(1+1)=f(1)+f(1)=2f(1)$ כלומר
$f(2)=2f(1)$ כלומר אם מתקיים $f(x)=cx$ לכל x אז בהכרח
$c=f(1)$. נראה כי זה אכן מתקיים.

ראשית, עבור n טבעי מתקיים

$$f(n)=f\left(\sum_{i=1}^{n}1\right)=\sum_{i=1}^{n}f(1)=nf(1)$$

כדרוש. עבור $\frac{1}{m}$ באשר m טבעי מתקיים

$$f(1)=f\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{m}\right)=\sum_{i=1}^{m}f(\frac{1}{m})=mf(\frac{1}{m})$$

כלומר $\frac{1}{m}f(1)=f\left(\frac{1}{m}\right)$ כדרוש.

כעת, עבור רציונלי חיובי $\frac{n}{m}$ (באשר $n,m\in N$) מתקיים

$$f\left(\frac{n}{m}\right)=f\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{m}\right)=\sum_{i=1}^{n}f(\frac{1}{m})=nf\left(\frac{1}{m}\right)=n\cdot\frac{1}{m}f(1)=\frac{n}{m}f(1)$$

כדרוש. כמו כן מתקיים

$$f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)=2f(0)$$

ולכן $f(0)=0$, וכמו כן מתקיים לכל $r\in\mathbb{R}$ כי

$$f(0)=f\big(r+(-r)\big)=f(r)+f(-r)$$

כלומר $f(r)+f(-r)=0$ כלומר $f(-r)=-f(r)$. בפרט עבור רציונלי שלילי מהצורה $q=\frac{-n}{m}$ באשר $n,m\in\mathbb{N}$ מתקיים

$$f(q)=-f(-q)=-f\left(\frac{n}{m}\right)=-\frac{n}{m}f(1)=qf(1)$$

כדרוש. כלומר עד כה הראנו כי לכל $x\in\mathbb{Q}$ מתקיים $f(x)=xf(1)$.

כעת נראה כי f רציפה בכל $a\in\mathbb{R}$ לפי היינה. תהי $a\in\mathbb{R}$ ותהי $x_n\to a$. רוצים להראות כי $f(x_n)\to f(a)$. מתקיים $x_n-a\to 0$ ולכן מרציפות f ב-0 מתקיים $f(x_n-a)\to f(0)=0$ כלומר

$$f(x_n-a)=f(x_n)-f(a)\to 0$$

כלומר $f(x_n)-f(a)\to 0$ כלומר $f(x_n)\to f(a)$ כדרוש.

לסיום, נראה כי $\mathrm{f(x)=xf(1)}$ לכל $x\in\mathbb{R}$. יהי $x\in\mathbb{R}$. ניתן למצוא סדרה של מספרים רציונליים (q_n) השואפת ל-x. לכן לפי רציפות $f(x)$ ב-x מתקיים

$$f(q_n)\to f(x)$$

הראנו כי עבור רציונליים מתקיים $f(q_n)=f(1)\cdot q_n$ לכן

$$f(1)\cdot q_n\to f(x)$$

מצד שני $q_n\to x$ לכן $f(1)\cdot q_n\to f(1)\cdot x$. כלומר קיבלנו כי

$$f(1) \cdot q_n \to f(x)$$

$$f(1) \cdot q_n \to f(1) \cdot x$$

ומיחידות הגבול, מקבלים כי

$$f(x) = f(1) \cdot x$$

מש"ל.