89-198 מתמטיקה בדידה – תרגול 9

<u>תזכורת</u>: תהי (A,R) קבוצה סדורה חלקית, תהי $B\subseteq A$ ויהי $b\in B$.

b נקרא R-מינימלי אם $\neg\exists x\in B(x\neq b\wedge(x,b)\in R)$, כלומר $\forall x\in B\big((x,b)\in R\Rightarrow x=b\big)$.

<u>תרגיל</u>: יהי R יחס סדר חלקי על קבוצה A.

הוכח שלכל תת קבוצה סופית ולא ריקה $B\subseteq \mathrm{A}$ יש איבר R-מינימלי.

<u>הוכחה</u>: נוכיח זאת באינדוקציה על תתי קבוצות מעוצמה n, עבור $n\in\mathbb{N}^+$.

<u>בסיס האינדוקציה</u>: נוכיח עבור $n=1$. תהי $B\subseteq A$ מעוצמה 1, כלומר $B=\{b\}$.

מכיון שמתקיים $\neg\exists x\in B(x\neq b)$ מתקיים גם $\neg\exists x\in B(x\neq b\wedge(x,b)\in R)$, ולכן b אבר מינימלי של B.

<u>הנחת האינדוקציה</u>: יהי $n\in\mathbb{N}^+$. נניח שלכל תת קבוצה של A מעוצמה n יש איבר מינימלי.

<u>מעבר האינדוקציה</u>: נוכיח עבור $n+1$, כלומר שלכל תת קבוצה של A מעוצמה $n+1$ יש איבר מינימלי.

תהי $B\subseteq \mathrm{A}$ מעוצמה $n+1$, יהי $b\in B$, ונסמן $B'=B\setminus\{b\}$.

B' היא תת קבוצה של A מעוצמה n, ולכן לפי הנחת האינדוקציה קיים ב B' אבר מינימלי, נסמנו $c\in B'$.

מכיון שמתקיים $(b,c)\in R\vee(b,c)\notin R$, מספיק לבדוק שני מקרים:

<u>מקרה 1</u>: $(b,c)\in R$. במקרה זה נראה ש b אבר מינימלי של B.

נניח בשלילה ש b אינו אבר מינימלי של B, כלומר קיים $x\in B$ כך ש $b\neq x$ ובנוסף $(x,b)\in R$.

מכיון ש $(x,b)\in R$ ובנוסף $(b,c)\in R$, נובע מהטרנזטיביות של R ש $(x,c)\in R$.

בנוסף מכיון ש $x\in B$ וגם $b\neq x$ נובע ש $x\in B'$.

כעת c אבר מינימלי של B', $x\in B'$ ובנוסף $(x,c)\in R$, לכן $x=c$.

כלומר המשמעות של $(x,b)\in R$ היא $(c,b)\in R$, אך בנוסף $(b,c)\in R$, ומהאנטיסימטריות של R נקבל ש $b=c$.

זו סתירה מכיון ש $c\in B'=B\setminus\{b\}$, לכן b אבר מינימלי של B.

<u>מקרה 2</u>: $(b,c)\notin R$. במקרה זה נראה ש c אבר מינימלי של B.

נניח בשלילה ש c אינו אבר מינימלי של B, כלומר קיים $x\in B$ כך ש $c\neq x$ ובנוסף $(x,c)\in R$.

מכיון ש c אבר מינימלי של B' נובע ש $x\notin B'$, כלומר $x=b$ ולכן המשמעות של $(x,c)\in R$ היא $(b,c)\in R$.

זו סתירה להנחה ש $(b,c)\notin R$, ולכן c הוא אבר מינימלי של B.

<u>תרגיל</u>: תהי A קבוצה סופית ויהי R יחס סדר חלקי על A. הוכח שקיים יחס סדר מלא T על A כך ש $R\subseteq T$.

<u>הוכחה</u>: נוכיח באינדוקציה על קבוצות מעוצמה n (קבוצות עם n אברים).

נראה שכל יחס סדר חלקי על קבוצה מעוצמה n ניתן להרחבה ליחס סדר מלא.

<u>בסיס האינדוקציה</u>: נוכיח עבור $n=0$. תהי A קבוצה מעוצמה 0, כלומר $A=\emptyset$, ויהי R יחס סדר חלקי על A,

אזי $R=\emptyset$. אכן מתקיים ש $\emptyset$ יחס סדר מלא על A.

<u>הנחת האינדוקציה</u>: יהי $n\in\mathbb{N}$. נניח שכל יחס סדר חלקי על קבוצה מעוצמה n ניתן להרחבה ליחס סדר מלא.

מעבר האינדוקציה: נוכיח שכל יחס סדר חלקי על קבוצה מעוצמה $n+1$ ניתן להרחבה ליחס סדר מלא.

תהי A קבוצה מעוצמה $n+1$, ויהי R יחס סדר חלקי על A.

מכיון ש R יחס סדר חלקי ו A תת קבוצה סופית ולא ריקה, נובע מהתרגיל הקודם שקיים $a \in A$ שהוא R-מינימלי.

נסמן $A' = A \setminus \{a\}$, ונגדיר את היחס $R' = R \cap (A' \times A')$ על A'.

R' היא קבוצת כל הזוגות הסדורים ב R למעט הזוגות בהם אחד הרכיבים הוא a.

מכיון ש a אבר מינימלי, מתקיים שאם יש ב R זוג סדור שאחד מרכיביו הוא a (למעט (a,a)) אזי בהכרח הרכיב הראשון הוא a והרכיב השני שונה מ a.

נוכיח ש R' יחס סדר חלקי על A'. אם $n = 0$ אזי $A' = \emptyset$, ו $R' = \emptyset$ הוא יחס סדר חלקי. אחרת:

- רפלקסיביות: יהי $b \in A' = A \setminus \{a\}$. מכיון ש R רפלקסיבי על A, נובע ש $(b,b) \in R$.
  בנוסף $(b,b) \in A' \times A'$, ולכן $(b,b) \in R'$.
- אנטי סימטריות: יהיו $b, c \in A'$ ונניח ש $(b,c),(c,b) \in R'$.
  מכיון ש $R' \subseteq R$ נקבל ש $(b,c),(c,b) \in R$ ומכיון ש R אנטי סימטרי נובע ש $b = c$.
- טרנזטיביות: יהיו $b, c, d \in A'$ ונניח ש $(b,c),(c,d) \in R'$.
  מכיון ש $R' \subseteq R$ נקבל ש $(b,c),(c,d) \in R$ ומכיון ש R טרנזיטיבי נובע ש $(b,d) \in R$.
  בנוסף, מכיון ש $b, d \in A'$ נובע ש $(b,d) \in A' \times A'$, ולכן $(b,d) \in R'$.

R' יחס סדר חלקי על קבוצה מעוצמה n, לכן מהנחת האינדוקציה קיים יחס סדר מלא T' על A' כך ש $R' \subseteq T'$.

כעת נגדיר את היחס $T = T' \cup (\{a\} \times A)$. נראה ש T יחס סדר מלא על A:

- רפלקסיביות: יהי $b \in A$. אם $b = a$ אזי $(b,b) = (a,a) \in \{a\} \times A$ ולכן $(b,b) \in T$.
  אחרת, $b \in A'$ ומכיון ש T' רפלקסיבי על A' נובע ש $(b,b) \in T'$ ולכן $(b,b) \in T$.
- אנטי סימטריות: יהיו $b, c \in A$ ונניח ש $(b,c),(c,b) \in T$.
  אם $b = a$ אזי $(c,b) = (c,a) \in \{a\} \times A$ (מכיון ש $(c,a) \notin T'$), ולכן $c = a$, כלומר $b = c$.
  אם $c = a$ אזי $(b,c) = (b,a) \in \{a\} \times A$ (מכיון ש $(a,b) \notin T'$), ולכן $b = a$, כלומר $b = c$.
  אחרת $b \neq a \wedge c \neq a$, כלומר $b, c \in A'$ ובנוסף $(b,c),(c,b) \in T'$, ומכיון ש T' אנטי סימטרי נובע ש $b = c$.
- טרנזטיביות: יהיו $b, c, d \in A$ ונניח ש $(b,c),(c,d) \in T$.
  אם $b = a$, אזי לכל $d \in A$ מתקיים $(b,d) = (a,d) \in \{a\} \times A \subseteq T$.
  אם $c = a$ אזי $b = a$, ולכל $d \in A$ מתקיים $(b,d) \in T$.
  אם $d = a$ אזי $c = a$ ולכן $b = a$, ומתקיים $(b,d) = (a,a) \in T$.
  אחרת, $b, c, d \in A'$ ו $(b,c),(c,d) \in T'$ ומכיון ש T' טרנזיטיבי נקבל ש $(b,d) \in T' \subseteq T$.
- היחס מלא: יהיו $b, c \in A$. אם $b = a$ אזי $(b,c) = (a,c) \in T$. אם $c = a$ אזי $(c,b) = (a,b) \in T$.
  אחרת, $b, c \in A'$ ומכיון ש T' יחס מלא $(b,c) \in T' \vee (c,b) \in T'$, לכן $(b,c) \in T \vee (c,b) \in T$.

כעת מכיון ש $R' = R \cap (A' \times A')$ ו a אבר R-מינימלי, נקבל ש $R \subseteq R' \cup (\{a\} \times A)$.

בנוסף, מהנחת האינדוקציה $R' \subseteq T'$ ולכן $R' \cup (\{a\} \times A) \subseteq T' \cup (\{a\} \times A) = T$, כלומר $R \subseteq T$.

<u>תרגיל</u>: נגדיר את המשחק Nim. זהו משחק עבור שני שחקנים. יש $n \in \mathbb{N}^+$ גפרורים על השולחן.

בכל תור שחקן מוציא 1, 2 או 3 גפרורים. השחקן שמוציא את הגפרור האחרון מפסיד.

נאמר ש n הוא "רע" אם הוא מהצורה $4m+1$ עבור $m \in \mathbb{N}$.

הוכח ש אם n אינו רע אז לשחקן המתחיל יש אסטרטגיה מנצחת (כלומר אם ישחק נכון הוא ינצח).

אחרת לשחקן שאינו מתחיל יש אסטרטגיה מנצחת.

<u>אינטואיציה</u>:

נסמן ב A את השחקן הראשון וב B את השני.

אם $n=1$, אז n רע, ואכן A מפסיד.

אם $n=2$, אז n אינו רע. כעת A מוציא גפרור, ומכיון שנותר גפרור אחד B מפסיד.

אם $n=3$, אז n אינו רע. כעת A מוציא שני גפרורים, ומכיון שנותר גפרור אחד B מפסיד.

אם $n=4$, אז n אינו רע. כעת A מוציא שלושה גפרורים, ומכיון שנותר גפרור אחד B מפסיד.

אם $n=5$, אז n רע. נבדוק מה האפשרויות:

- אם A מוציא גפרור, נותרים 4 גפרורים.
  כעת B השחקן הראשון ויש 4 גפרורים, לכן יש ל B אסטרטגיה מנצחת.
- אם A מוציא 2 גפרורים, נותרים 3 גפרורים.
  כעת B השחקן הראשון ויש 3 גפרורים, לכן יש ל B אסטרטגיה מנצחת.
- אם A מוציא 3 גפרורים, נותרים 2 גפרורים.
  כעת B השחקן הראשון ויש 2 גפרורים, לכן יש ל B אסטרטגיה מנצחת.

<u>הוכחה</u>: נוכיח באינדוקציה חזקה על n.

<u>הנחת האינדוקציה</u>: יהי $n \in \mathbb{N}^+$, נניח שלכל $0 < k < n$ טבעי, הטענה נכונה.

<u>מעבר האינדוקציה</u>: נבדוק שלושה מקרים:

- <u>מקרה 1</u>: $n = 4m+1$ עבור $m=0$, כלומר $n=1$:
  במקרה זה n רע, ואכן השחקן הראשון מפסיד במהלך הראשון.
- <u>מקרה 2</u>: $n = 4m+1$ עבור $m \in \mathbb{N}^+$:
  במקרה זה $n \geq 5$ רע. השחקן הראשון A יכול להוציא i גפרורים עבור $i \in \{1,2,3\}$.
  כלומר במהלך הבא ישארו $k = n-i$ גפרורים.
  אזי $0 < k < n$ ובנוסף k אינו רע, כלומר לא מהצורה $k = 4u+1$ עבור $u \in \mathbb{N}$.
  מהנחת האינדוקציה נובע שלשחקן שמתחיל במצב זה, כלומר ל B, יש אסטרטגיה מנצחת.
- <u>מקרה 3</u>: $n = 4m+i$ עבור $m \in \mathbb{N}$ ו $i \in \{2,3,4\}$. במקרה זה n אינו רע.
  השחקן הראשון A יכול להוציא $i-1$ גפרורים.
  במצב זה השחקן השני B יתחיל במצב שבו יש $k = 4m+1$ גפרורים.
  מכיון ש $0 < k < n$, ו k רע, נובע מהנחת האינדוקציה, שלשחקן שאינו מתחיל, כלומר ל A, יש אסטרטגיה מנצחת.