פתרון תרגיל 5 מבוא לתורת החבורות תשע"ט

שאלה 1. תהי G חבורה, ותהי $N \lhd G$.

א. תהי $H \leq G$. הוכיחו כי $N \cap H \lhd H$.

ב. הוכיחו כי $Z(N) \lhd G$. שימו לב כי שברור ש-$Z(N) \lhd N$, אבל כאן צריך להראות נורמליות בתוך G.

פתרון. א. אנחנו כבר יודעים שחיתוך תת־חבורות הוא תת־חבורה. יהי $x \in N \cap H$ וצריך להוכיח כי לכל $h \in H$ מתקיים כי $h^{-1}xh \in N \cap H$. אם $x, h \in H$, אז מפני ש-H סגורה להופכי ולמכפלה ברור כי $h^{-1}xh \in H$. נתון כי $N \lhd G$, ולכן לכל $g \in G$ מתקיים $g^{-1}xg \in N$, ובפרט אם $g \in H$. לכן $h^{-1}xh \in N \cap H$, כדרוש.

ב. מפני ש-$Z(N) \leq N$ וגם $N \leq G$, אז ברור ש-$Z(N) \leq G$. נותר להראות נורמליות. כלומר צריך להראות שלכל $g \in G$ מתקיים $gZ(N)g^{-1} \subseteq Z(N)$.
יהי $x \in gZ(N)g^{-1}$. לכן קיים $z \in Z(N)$ כך ש-$x = gzg^{-1}$. צריך להראות כי לכל $n \in N$ מתקיים $nx = xn$, כי לפי הגדרת $Z(N)$, לכל $n \in N$ מתקיים $nz = zn$.
מפני ש-N נורמלית ב-G, אז לכל $g \in G$ מתקיים כי $gzg^{-1} \in N$ וגם $gng^{-1} \in N$.
נסתכל על המשוואה $ngzg^{-1} = gzg^{-1}n$ ונכפול אותה מימין ב-g ומשמאל ב-g^{-1} ונקבל $g^{-1}ngz = zg^{-1}ng$. אבל $g^{-1}ng = n'$ עבור איזשהו $n' \in N$. לכן המשוואה שקולה למשוואה $n'z = zn'$, והיא מתקיימת כי $z \in Z(N)$.

שאלה 2. נתבונן בחבורה $G = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

א. הוכיחו שהסדר של כל איבר ב-G הוא סופי, אבל שישנם איברים בחבורה מסדר גדול כרצוננו.

ב. הראו כי תת־החבורה $H = \left\langle \frac{2}{5} + \mathbb{Z}, \frac{3}{14} + \mathbb{Z} \right\rangle$ (שנוצרת על ידי המחלקות של $\frac{2}{5}$ ו-$\frac{3}{14}$) היא ציקלית. מצאו את האינדקס $[G : H]$.

פתרון. א. איבר היחידה בחבורה G הוא המחלקה $\mathbb{Z} = 0 + \mathbb{Z}$. לכן יש למצוא לכל $x \in G$ מספר טבעי $n \in \mathbb{N}$ כך שנקבל $n \cdot x + \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$. שימו לב כי החבורה חיבורית ולכן למציאת הסדר "העלאה בחזקה" היא כפל ב-n.
כל איבר בחבורה אפשר לרשום בצורה $x = \frac{a}{b} + \mathbb{Z}$ עבור $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$. מכאן ניתן לראות כי $b \cdot \left(\frac{a}{b} + \mathbb{Z}\right) = a + \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$. לכן x הוא לכל היותר מסדר (סופי) b. נניח כי $\frac{a}{b}$ הוא שבר מצומצם, ולכן הסדר של x במקרה זה הוא בדיוק b. סדרת השברים $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ מתאימה לסדרה של איברים ב-G שסדרם עולה ממש.

ב. יש להוכיח שקיים $q \in \mathbb{Q}$ כך שמתקיים $\left\langle \frac{2}{5} + \mathbb{Z}, \frac{3}{14} + \mathbb{Z} \right\rangle = \langle q + \mathbb{Z} \rangle$. נראה שאפשר לבחור את $q = \frac{1}{70}$. בשביל להראות הכלה דו־כיוונית, מספיק להראות הכלה של היוצרים. נשים לב כי $\frac{1}{70} = 7 \cdot \frac{2}{5} - 13 \cdot \frac{3}{14}$, ולכן $\left\langle \frac{1}{70} + \mathbb{Z} \right\rangle \subseteq \left\langle \frac{2}{5} + \mathbb{Z}, \frac{3}{14} + \mathbb{Z} \right\rangle$.
מצד שני $\frac{2}{5} = 28 \cdot \frac{1}{70}$, $\frac{3}{14} = 15 \cdot \frac{1}{70}$, ולכן $\left\langle \frac{2}{5} + \mathbb{Z}, \frac{3}{14} + \mathbb{Z} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{70} + \mathbb{Z} \right\rangle$.
סדר תת־החבורה H הוא 70 ואילו G היא אינסופית, ולכן האינדקס שלה היא אינסופי לפי משפט לגראנז'. בנוגע לאינדקס, אפשר להראות גם שלכל שני מספרים ראשוניים $p_1 \neq p_2$ שונים שאינם מחלקים את 70 יתקיים כי $p_1 + H \neq p_2 + H$ ולכן ישנן אינסוף מחלקות שמאליות שונות.

שאלה 3. תהיינה G,H חבורות ויהי $f:G\to H$ הומומורפיזם. הוכיחו: f חח"ע אם ורק אם $\ker f=\{e_G\}$.

פתרון. לכיוון הראשון, נניח שההומומורפיזם f חח"ע. f הומומורפיזם ולכן $f(e_G)=e_H$. f חח"ע ולכן e_G היחיד שהולך לאיבר e_H, ולכן $\ker f=\{e_G\}$.

לכיוון השני, נניח שמתקיים: $\ker f=\{e_G\}$. נניח שעבור g_1,g_2 מתקיים $f(g_1)=f(g_2)$, ונרצה להראות שגם $g_1=g_2$. אם כן, $f(g_1)f(g_2)^{-1}=e_H$ ומכיוון שזהו הומומורפיזם מתקיים: $f\left(g_1g_2^{-1}\right)=e_H$. לכן $g_1g_2^{-1}\in\ker f$ ומהנתון נקבל: $g_1g_2^{-1}=e_G$, ולכן $g_1=g_2$. לכן f אכן חח"ע.

שאלה 4. תהי G חבורה. נגדיר $f:G\to G$ ע"י: $f(g)=g^2$.

1. הוכיחו שהפונקציה f היא הומומורפיזם אם ורק אם G אבלית.
2. נניח שהחבורה G אבלית וסופית. הוכיחו שהפונקציה f היא איזומורפיזם אם ורק אם הסדר של G הוא אי-זוגי.

פתרון. ב. לכיוון הראשון, נניח שהחבורה אבלית. יהיו $g,h\in G$. כעת: $f(gh)=(gh)^2=ghgh=g^2h^2=f(g)f(h)$ ולכן f הומומורפיזם.לכיוון השני, נניח ש: f הומומורפיזם. יהיו $g,h\in G$. כעת: $f(gh)=(gh)^2=ghgh$ וגם $f(gh)=f(g)f(h)=g^2h^2$, כלומר $g^2h^2=ghgh$. נצמצם ונקבל: $gh=hg$, כלומר G אבלית.

ב. לכיוון הראשון, נניח שהחבורה מסדר אי-זוגי. מכיוון שהפונקציה היא הומומורפיזם (לפי הסעיף הראשון) והחבורה סופית, מספיק להראות שהפונקציה חח"ע. לשם כך יש להסביר מדוע הגרעין הוא טריוויאלי. נניח בשלילה שקיים $g\in\ker f$ המקיים $g\neq e_G$. מהגדרת הפונקציה, $e_G=f(g)=g^2$, ולכן הסדר של g הוא 2. הסדר של g מחלק את הסדר של החבורה ולכן הסדר של החבורה הוא זוגי וסתירה.
לכיוון השני, נניח שהפונקציה היא איזומורפיזם. נניח בשלילה שהסדר של החבורה הוא זוגי, לכן יש איבר מסדר 2 (ראינו בתרגול) ולכן f לא חח"ע (האיבר הזה ואיבר היחידה שניהם בגרעין) וסתירה.

שאלה 5. עבור כל אחת מן ההעתקות הבאות קבעו והוכיחו האם היא הומומורפיזם, מונומורפיזם, אפימורפיזם או איזומורפיזם.

א. $f:\mathbb{C}^*\to\mathbb{C}^*$ המוגדרת לפי $f(x)=x^{-3}$.

ב. $f_x:G\to G$ המוגדרת לפי $f_x(g)=xgx^{-1}$ כאשר G חבורה ו-$x\in G$ איבר.

ג. $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_n$ המוגדרת לפי $f(k)=([k],[k])$.

פתרון. א. הפונקציה היא אפימורפיזם, אבל לא מונומורפיזם. למשל $f(1)=f(e^{\frac{2\pi i}{3}})=1$.

ב. הפונקציה הזו היא איזומורפיזם. סוג כזה של איזומורפיזם נקרא אוטומורפיזם פנימי. נראה שאכן מדובר בהומומורפיזם:

$$f_x(gh)=xghx^{-1}=xgx^{-1}xhx^{-1}=f_x(g)f_x(h)$$

כדי לראות ש-f_x הוא חח"ע נשים לב שאם $xgx^{-1}=e$, אז $g=x^{-1}ex$ ולכן $g=e$.
כדי להראות ש-f_x הוא על, יהי $h\in G$. נבחר בתור המקור שלו את $x^{-1}hx$, ואכן $f_x(x^{-1}hx)=h$.

ג. פונקציה זו היא אכן הומומורפיזם. עם זאת, היא לא אפימורפיזם (אלא אם $n=1$ ואז זה דבילי. לזוג $([0],[1])$למשל אין מקור) ולא מונומורפיזם (למשל $f(k)=f(k+n)$).