תזכורת:

סיימנו לדבר על אקסיומות ZF והתחלנו לדבר על אקסיומת הבחירה:

אקסיומת הבחירה: תהי S של קבוצות אזי קיימת פונקציה $f : S \to \bigcup S$ כך שלכל $\emptyset \neq X \in S$ $f(X) \in X$.

עקרון הסדר הטוב: על כל קבוצה קיים סדר טוב. (אפשר לבנות פונקציה חח"ע ועל מהקבוצה לאיזשהו סודר).

מושגים בקבוצות סדורות חלקיות:

תהי $(A, <)$ קבוצה סדורה חלקית.

1. $B \subseteq A$ נקראת שרשרת אם כל שני איברים בB ניתנים להשוואה.
2. אם $B \subseteq A$ אז איבר $a \in A$ נקרא "חסם מלעיל" של B אם לכל $b \in B$, $b < a$ או $b = a$
3. איבר $a \in A$ נקרא מקסימלי אם לכל $x \in A$ לא מתקיים $a < x$.

עקרון המקסימום של האוסדורף: בכל קס"ח קיימת שרשרת מקסימלית (כלומר, שרשרת שלא מוכלת ממש בשום שרשרת).

הלמה של צורן: תהי $(A, <)$ קס"ח לא ריקה כך שכל שרשרת בA חסומה מלעיל. אזי קיים בA איבר מקסימלי.

משפט: האקסיומות הבאות שקולות מעל ZF:

1. הלמה של צורן
2. עיקרון המקסימום של האוסדורף
3. עיקרון הסדר הטוב
4. אקסיומת הבחירה

בשיעור הקודם הוכחנו:

$1 \to 2$

$2 \to 3$

נמשיך:

$3 \to 4$: תהי S קבוצה של קבוצות. על כל קבוצה יש סדר טוב. נגדיר סדר טוב על $\bigcup S$.
(תזכרו שמאקסיומות ZF אנחנו יודעים שאם S היא קבוצה אז $\bigcup S$ היא קבוצה).

זה משרה סדר טוב על כל $X \in S$.

נגדיר

$$f : S \to \bigcup S$$

באופן הבא:

$$\forall \emptyset \neq X \in S$$

$$f(X)$$

ישלח לאיבר הראשון של X. מכיוון שX סדורה קיים איבר ראשון, יחיד, ניתן לכתוב סוחא שתביע אותו. כלומר, ניתן להגדיר את הפונקציה במפורש.

$f(\emptyset)$ ישלח למשל לאיבר הראשון ב$\bigcup S$.

הפונקציה שבנינו עונה על התנאים.

$4 \to 1$: נתונה אקסיומת הבחירה, רוצים להוכיח את הלמה של צורן.

כלומר, תהי A קס"ח לא ריקה שמקיימת שלכל שרשרת יש חסם מלעיל. אנחנו רוצים להוכיח שיש בA איבר מקסימלי.

נסתכל על $S=P(A)$. מאקסיומת הבחירה קיימת פונקציה

$$c:P(A)\to A$$

כך שלכל תת קבוצה לא ריקה B של A

$$c(B)\in B$$

מהלמה של הארטוגס קיים סודר θ שאין פונקציה חח"ע ממנו לA.
נגדיר פונקציה $f:Par(\theta,A)\to A$ באופן הבא.
תהי g פונקציה חלקית מθ לA. נסמן

$$U_g=\{a\in A:\forall\alpha\in Dom(g),g(\alpha)<a\}$$

$$f(g)=\begin{cases}c(U_g) & U_g\neq\emptyset\\ c(A) & U_g=\emptyset\end{cases}$$

ממשפט ההגדרה ברקורסיה, ניתן להגדיר $F:\theta\to A$ ומקיימת שלכל $\beta\in\theta$

$$F(\beta)=f(F|_\beta)$$

θ נבחר כך שאין פונקציה חח"ע ממנו לA. לכל F היא לא חח"ע. יהיו $\gamma<\delta$ הסודרים הראשונים שעבורם $F(\gamma)=F(\delta)$ (δ זה הסודר הראשון שבו נגיע להתנגשות. כלומר שF שלו שווה לF של סודר קודם.)
זה אומר ש $F|_\delta$ היא פונקציה חח"ע.
טענה: $Im(F|_\delta)$ היא שרשרת בA.
הוכחת הטענה: יהיו $x,y\in Im(F|_\delta)$. אזי $x=F(\alpha),y=F(\beta)$. בה"כ $\alpha<\beta$. אנחנו רוצים להוכיח שניתן להשוות בין x לy. באופן יותר ספציפי נטען ש$x<y$.

$$F(\beta)=f(F|_\beta)=\begin{cases}c(U_{F|_\beta}) & U_{F|_\beta}\neq\emptyset\\ c(A) & U_{F|_\beta}=\emptyset\end{cases}$$

אם $U_{F|_\beta}\neq\emptyset$ אז $F(\beta)\in U_{F|_\beta}$, וניזכר ש $U_{F|_\beta}$ זה קבוצת האיברים שגדולים ממש מכל איבר התמונה של $F|_\beta$. $F(\alpha)$ שייך לתמונה של $F|_\beta$. לכן קיבלנו ש$F(\alpha)<F(\beta)$.
אם $U_{F|_\beta}=\emptyset$, $F(\beta)=c(A)$. אבל $F(0)=f(F|_0)=c(U_\emptyset)=c(A)$. נקבל ש$F(\beta)=F(0)$ בסתירה לחח"ע. לכן האופציה הזאת לא יכולה להתקיים. ונשארנו רק עם האופציה הראשונה.
קיבלנו ש $F|_\delta$היא שרשרת בA. ניזכר כי A היא קבוצה שמקיימת שכל שרשרת חסומה מלעיל.
בפרט קיים איזשהו $a\in A$ שגדול או שווה לכל איברי $F|_\delta$.
נטען שa הוא איבר מקסימלי בA.
אם a הוא לא איבר מקסימלי זה אומר שיש מישהו שגדול ממנו ממש.
זה אומר שיש מישהו שגדול ממש מכל איברי השרשרת. כלומר

$$U_{F|_\delta}\neq\emptyset$$

לכן

$$F(\delta) = c(U_{F|\delta}) \in U_{F|_\delta}$$

כלומר

$$F(\delta) > F(\epsilon)$$

לכל $\epsilon < \delta$.

אבל אנחנו יודעים ש$F(\delta) = F(\gamma)$ עובר איזשהו $\gamma < \delta$. סתירה!

לכן אין איברים שגדולים ממש מa. כלומר, a הוא איבר מקסימלי.

עוד טענות שקולות:

משפט: האקסיומות הבאות שקולות:

1. עקרון הסדר הטוב
2. לכל שתי קבוצות X, Y מתקיים: או שיש $f : X \to Y$ חח"ע, או שיש $f : Y \to X$ חח"ע. (זה מה שבבדידה קראתם לו עקרון השוואת העוצמות. כלומר שלכל שתי עוצמות $|X|, |Y|$ מתקיים ש $|X| \leq |Y|$ או $|Y| \leq |X|$)

הוכחה:

$2 \to 1$: יש לX ולY סדרים טובים. בפרט, יש איזו סדר $g : X \to \alpha$ α סודר, ו$h : Y \to \beta$ β סודר. במערכת ZF ידוע שלכל שני סודרים α וβ מתקיים שאחד מהם מוכל בשני. $\alpha \subseteq \beta$ או $\beta \subseteq \alpha$. נסמן בi את פונקציית ההכלה בכיוון שמתקיים.

אם זה האופציה הראשונה

$$h^{-1} \circ i \circ g : X \to Y$$

הרכבה של פונקציות חח"ע ולכן חח"ע.

אם זאת האופציה השניה אז

$$g^{-1} \circ i \circ h : Y \to X$$

פונקציה חח"ע.

$1 \to 2$: תהי A קבוצה. מהלמה של הארטוגס קיים סודר $H(A)$ כך שאין פונקציה חח"ע ממנו לA. לכן מההנחה שלנו יש פונקציה חח"ע $f : A \to H(A)$. $f(A) \subseteq H(A)$. תת קבוצה של קבוצה סדורה היטב היא סדורה היטב. מכיוון שf חח"ע הסדר הטוב על $f(A)$ משרה סדר טוב על A.

ניתן הוכחה ישירה לכך שאקסיומת הבחירה גוררת את עקרון הסדר הטוב.

הוכחה: תהי A קבוצה. מאקסיומת הבחירה יש פונקציה

$$c : P(A) \to A$$

כך שלכל $\emptyset \neq B \in P(A)$

$$c(B) \in B$$

מלמה של הארטוגס יש סודר θ כך שאין פונקציה חח"ע ממנו לA.

נגדיר פונקציה $f : Par(\theta, A) \to A$

לכל $g \in Par(\theta, A)$

$$f(g) = \begin{cases} c(A \setminus Im(g)) & A \setminus Im(g) \neq \emptyset \\ c(A) & A \setminus Im(g) = \emptyset \end{cases}$$

ממשפט ההגדרה ברקורסיה, קיימת פונקציה

$$F : \theta \to A$$

ומקיימת שלכל $\beta < \theta$

$$F(\beta) = f(F|_\beta)$$

לפי הבחירה של θ אין פונקציה חח"ע מθ לA ובפרט F לא חח"ע. יהי δ הסודר הראשון שבו יש התנגשות. בפרט, $F|_\delta$ היא חח"ע.
נטען ש$F|_\delta$ היא על.
אחרת, $A \setminus Im(F|_\delta) \neq \emptyset$. וזה אומר ש

$$F(\delta) = f(F|_\delta) = c(A \setminus Im(F|_\delta))$$

בפרט

$$F(\delta) \notin Im(F|_\delta)$$

בסתירה לכך שδ הוא הסודר הראשון שיש בו התנגשות, כלומר שקיים $\gamma < \delta$ עבורו $F(\gamma) = F(\delta)$.
מסקנה: $F|_\delta$ היא פונקציה חח"ע ועל מδ לA. זה משרה יחס סדר טוב על A.
תרגיל: התנאים הבאים שקולים:
1. לכל קבוצה S של קבוצות שאף אחת מהן לא ריקה, קיימת פונקציה $c : S \to \bigcup S$ כך שלכל $X \in S$ $f(X) \in X$
2. אקסיומת הבחירה.
3. תהי A קבוצה עם יחס שקילות. אזי קיימת קבוצה של נציגים. כלומר, קבוצה $B \subseteq A$ כך שלשל $a \in A$ קיים $b \in B$ כך ש$a \sim b$, וכן לכל $b_1, b_2 \in B$, $b_1 \nsim b_2$.
הוכחה:
$2 \to 1$: תהי S קבוצה של קבוצות. אם אין בה את $\emptyset$ סיימנו. אחרת, נסתכל על $S \setminus \{\emptyset\}$. לפי אקסיומה 1 נוכל לבנות פונקציה

$$c : S \setminus \{\emptyset\} \to \bigcup S$$

כך שלכל $X \in S \setminus \{\emptyset\}$ $f(X) \in X$. נבחר $x \in \bigcup S$, ונגדיר $f(\emptyset) = x$. וזה יגדיר לנו פונקציה $f : S \to \bigcup S$ שעונה על הדרישות.
$3 \to 2$: תהי A קבוצה עם יחס שקילות. נגדיר $S = A/\sim$ קבוצת המנה, כלומר הקבוצה של כל מחלקות השקילות. לפי אקסיומת הבחירה קיימת

$$f : A/\sim \to A$$

כך שלכל מחלקת שקילות היא שולחת אותה לאיבר מהמחלקה. אזי $Im(f) \subseteq A$ היא קבוצת נציגים. הסבר:

יהי $a \in A$. אזי $[a] \in A/\sim$. לכן $f[a] \in [a]$. כלומר, $a \sim f[a] \in Im(f)$.

וכן יהיו $b_1 \neq b_2 \in Im(f)$. זה אומר שלכל אחד מהם יש מקור שונה. כלומר b_1 שייך למחלקת שקילות מסויימת, וb_2 שייך למחלקת שקילות אחרת. בפרט b_1 וb_2 לא שקולים (כי הם לא מאותה מחלקת שקילות).

$1 \to 3$: תהי S קבוצה של קבוצות לא ריקות. נסתכל על הקבוצה

$$S' = \{(x, X) : x \in X \in S\}$$

נגדיר על S' יחס שקילות:

$$(x, X) \sim (y, Y) \iff X = Y$$

לפי ההנחה, יש קבוצת נציגים. נבנה פונקציה $f : S \to \bigcup S$

$$f(X)$$

שווה לרכיב הראשון בנציג של מחלקת השקילות שX מגדיר. הרכיב הראשון בזוג הוא איבר שייך לX.

מונים

הגדרה: סודר α יקרא "מונה" אם לכל סודר $\beta < \alpha$ אין פונקציה חח"ע ועל מβ לα.

לדוגמא:

1. 0 הוא מונה.
1. 1 הוא מונה כי הסודר היחיד שקטן מ1 הוא 0 שהוא קבוצה ריקה. ואין פונקציה חח"ע ועל מקבוצה ריקה לקבוצה לא ריקה.
3. $\omega + 1$ אינו מונה, כי יש פונקציה חח"ע ועל מω ל$\omega + 1$.
4. $\omega + \omega$ אינו מונה כי יש פונקציה חח"ע ועל מω ל$\omega + \omega$.

$\omega + \omega = otp(\omega \times \{0\} \cup \omega \times \{1\})$ לכן יש פונקציה חח"ע ועל מ$\omega \times \{0\} \cup \omega \times \{1\}$ ל$\omega + \omega$.

אז מספ]יק לבנות פונקציה חח"ע ועל מω ל$\omega \times \{0\} \cup \omega \times \{1\}$.

$$f(n) = \begin{cases} (m, 0) & n = 2m \\ (m, 1) & n = 2m + 1 \end{cases}$$

הגדרה: תהי A קבוצה.

$$|A| = \min\{\alpha|$$

יש פונקציה חח"ע ועל מα לA }

הערה: לכל קבוצה A, $|A|$ היא מונה.

הוכחה: יהי $\beta < |A|$. אם הייתה פונקציה חח"ע ועל מβ ל$|A|$, אז מהרכבה הייתה גם פונקציה חח"ע ועל מβ לA. סתירה למינימליות של $|A|$.

מספר תכונות:

1. לכל קבוצה יש עוצמה, וזה נובע מעיקרון הסדר הטוב. עקרון הסדר הטוב אומר שלכל קבוצה A יש סדר טוב, כלומר, יש פונקציה חח"ע ועל מA לאיזשהו סודר.
2. קבוצה A היא מונה אמ"ם $A = |A|$.

הסבר: אם $A = |A|$ אז מכיוון שעוצמה של קבוצה היא תמיד מונה, $|A|$ היא מונה, ונתון ש$|A| = A$ אז A הוא מונה.

כיוון שני: נניח שA מונה. בפרט הוא סודר וברור שיש פונקציה חח"ע ועל ממנו לעצמו. אבל מהגדרה של מונה, לכל סודר שקטן ממנו אין פונקציה חח"ע ועל ממנו לA. לכל A הוא הסודר המינימלי שיש פונקציה חח"ע ועל ממנו לA. כלומר, לפי הגדרה $|A| = A$.

3. אם A סדורה היטב אז $|A| \leq otp(A)$.

הסבר: יש פונקציה חח"ע ועל מ$otp(A)$ לA. ולכן לפי הגדרה $|A| \leq otp(A)$

4. יהיו A וB קבוצות. אזי $|A| = |B|$ אמ"ם יש פונקציה חח"ע ועל מA לB.

הוכחה: $\Longrightarrow$: נניח שיש $f : A \to B$ חח"ע ועל. יש פונקציות חח"ע ועל:

$$g : A \to |A|$$

$$h : B \to |B|$$

$$h \circ f : A \to |B|$$

היא פונקציה חח"ע ועל, לכן $|A| \leq |B|$

באותו אופן נקבל שיש פונקציה חח"ע ועל $B \to |A|$ ולכן $|B| \leq |A|$

אז סה"כ $|A| = |B|$.

$\Longleftarrow$:

$$A \to |A| = |B| \to B$$

ההרכבה תהיה פונקציה חח"ע ועל מA לB.

טענה:יהיו A, B **קבוצות.** $|A| \leq |B|$ **אמ"ם יש פונקציה חח"ע** $f : A \to B$

הוכחה:

$\Longrightarrow$ נניח שיש $f : A \to B$ חח"ע. נגדיר על B יחס סדר טוב לפי $|B|$. $f(A) \subseteq B$, לכן היחס סדר טוב על B משרה יחס סדר טוב על A.

$$otp(A) \leq otp(B) = |B|$$

$$|A| \leq otp(A)$$

ולכן נקבל ש

$$|A| \leq |B|$$

$\Leftarrow |B| \leq |A|$, זה סודרים, לכן קטן שווה הוא הכלה. כלומר, $|B| \subseteq |A|$.

$$i : |A| \to |B|$$

חח"ע.

לפי הגדרת עוצמה יש פונקציות חח"ע ועל

$$f : A \to |A|$$

$$g : |B| \to B$$

$$g \circ i \circ f : A \to B$$

פונקציה חח"ע.

מסקנה: (קש"ב) יש פונקציה חח"ע ועל מA לB אמ"ם יש פונקציה חח"ע מA לB ופונקציה מB לA.

הוכחה: $\Leftarrow$: ברור.

$\Rightarrow$: נניח שיש פונקציות חח"ע מA לB ומB לA.

זה גורר ש $|B| \leq |A|$ ו$|A| \leq |B|$. זה יחס סדר על סודרים, ולכן אנחנו יודעים שזה גורר

$$|A| = |B|$$

וראינו שזה גורר שיש פונקציה חח"ע ועל מA לB.

טענה: תהי $A \neq \emptyset$. יש פונקציה חח"ע מA לB אמ"ם יש פונקציה על מB לA.

הוכחה: $\Leftarrow$ תהי $f : A \to B$ חח"ע. נגדיר

$$g : B \to A$$

באופן הבא. לכל איבר בתמונה של f יש מקור יחיד, כי f חח"ע. אז נשלח כל איבר בתמונה למקור שלו.

ונבחר איזשהו איבר $a \in A$. ונשלח אליו את כל האיברים שלא בתמונה.

זאת פונקציה על.

$\Rightarrow$ נניח שיש $g : B \to A$ על.

נגדיר יחס שקילות על B:

$$b_1 \sim b_2 \iff g(b_1) = g(b_2)$$

לפי אקסיומת הבחירה מכל מחלקת שקילות נוכל לבחור נציג.

לכל $a \in A$ נסתכל על מחלקת השקילות של כל האיברים שהולכים אליו (g על לכן קיימת מחלקת שקילות כזאת). נשלח את a לנציג מהמחלקה.

זאת פונקציה חח"ע.

טענה:

עכשיו ראינו שאקסיומת הבחירה גוררת שאם יש פונקציה על $g : B \to A$ אז יש פונקציה חח"ע בכיוון השני שהופכת את g מצד ימין כלומר קיימת $f : A \to B$ כך ש$g \circ f = I_A$.
למעשה הטענה שקולה לאקסיומת הבחירה.
כלומר: האקסיומה הבאה "לכל פונקציה $g : B \to A$ על קיימת $f : A \to B$ חח"ע כך ש $g \circ f = I_A$" דוררת את אקסיומת הבחירה.
הוכחה: ראינו שאקסיומת הבחריה שקולה לבחירה מאוסף של קבוצות לא ריקות.
כלומר, תהי S קבוצה של קבוצות לא ריקות, אנחנו רוצים לבנות פונקציה

$$f : S \to \bigcup S$$

כך שלכל $X \in S$

$$f(X) \in X$$

ראינו שזה שקול לבחירת נציגים ממחלקות שקילות. כלומר, אפשר להניח שכל הקבוצות בS זרות בזוגות.

$$g : \bigcup S \to S$$

$$g(a) = A(= [a])$$

כל איבר נשלח לקבוצה היחידה שהוא שייך אליה.
זאת פונקציה על כי הקבוצות לא ריקות.
מההנחה שלנו קיימת פונקציה

$$f : S \to \bigcup S$$

כך ש

$$g(f(A)) = A$$

לכל $a \in S$.
אבל לפי הגדרת g כל איבר הולך לקבוצה שהוא נמצא בה. לכן $f(A) \in A$.