הרצאה 9

$$f(a+h)=f(a)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i+o\big(\|h\|\big)_{h\to 0}$$

$$o\big(\|h\|\big)_{h\to 0}=\epsilon(h)\|h\| \qquad \epsilon(h)\xrightarrow[h\to 0]{}0$$

$$f(x)=f(a)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i-a_i)+o\big(\|x-a\|\big)_{x\to a}$$

$$m=1:$$

$$f(a+h)=f(a)+\langle\nabla f(a),h\rangle+o\big(\|h\|\big)_{h\to 0}$$

$$f(x)=f(a)+\langle\nabla f(a),x-a\rangle+o\big(\|x-a\|\big)_{x\to a}$$

דיפרנציאליות

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-\langle\nabla f(a),h\rangle}{\|h\|}=0\Rightarrow\forall i\exists\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)}$$

$$f(x)=f(a)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i-a_i)+\underbrace{\epsilon(x-a)}_{\xrightarrow[x\to a]{}0}\|x-a\|$$

זה קירוב לפונקציה: $f(x)\approx f(a)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i-a_i)+o\big(\|x-a\|\big)_{,x\to a}$

דוגמא

$$f(x,y)=\arctan\frac{x+y}{1+xy} \qquad |x|,|y|\ll 1$$

$$a=0: f(x,y)\approx f(a)+\frac{\partial f}{\partial x}(a)(x-a_1)+\frac{\partial f}{\partial y}(a)(y-a_2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)^2}=\frac{1+xy-(x+y)y}{(1+xy)^2}\Big|_{\substack{x=0\\y=0}}=1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=1$$

$$\arctan\frac{x+y}{1+xy}\approx x+y+o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

דוגמא

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x=y=0\end{cases}$$

$\frac{\partial f}{\partial y}(a),\frac{\partial f}{\partial x}(a)\ \exists$ לכל $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ אבל f לא דיפ' $(0,0)$.

משפט (תנאי מספיק לדיפ')

נניח כי: $f:\Omega\to\mathbb{R}^m, a\in\overset{o}{\Omega}$:

1) קיימות $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ לכל x בסביבה $B_a(\delta)\subset\Omega$.

2) $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$: $\forall i$ רציפות ב$B_a(\delta)$.

אזי f דיפ' בנקודה a.

הוכחה

ניקח $n=2$.

$$||h||<\delta:\ f(a+h)-f(a)\overset{?}{=}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i+\underbrace{\epsilon(h)||h||}_{\epsilon(h)\xrightarrow[h\to 0]{}0}$$

$$f(a_1+h_1,a_2+h_2)-f(a_1,a_2)=\underbrace{f(a_1+h_1,a_2+h_2)-f(a_1,a_2+h_2)}_{x\text{ שינוי לגבי }}+\underbrace{f(a_1,a_2+h_2)-f(a_1,a_2)}_{y\text{ שינוי לגבי }}$$

לפי משפט $Lagrange$ למשתנה אחד $g(x_0+h)-g(x_0)=g'(x_0+\theta h)h$:

$$f(a_1+h_1,a_2+h_2)-f(a_1,a_2+h_2)=\frac{\partial f}{\partial x}(a_1+\theta_1h_1,a_2+h_2)h_1\qquad 0<\theta_1<1$$

$$f(a_1,a_2+h_2)-f(a_1,a_2)=\frac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2+\theta_2h_2)h_2\qquad 0<\theta_2<1$$

$$\begin{aligned}f(a+h)-f(a)-\frac{\partial f}{\partial x}(a)h_1-\frac{\partial f}{\partial y}(a)h_2\\=\frac{\partial f}{\partial x}(a_1+\theta_1h_1,a_2+h_2)h_1+\frac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2+\theta_2h_2)h_2-\frac{\partial f}{\partial x}(a)h_1-\frac{\partial f}{\partial y}(a)h_1\\=\alpha(h)h_1+\beta(h)h_2\end{aligned}$$

עבור $\alpha(h)=\frac{\partial f}{\partial x}(a_1+\theta_1h_1,a_2+h_2)h_1-\frac{\partial f}{\partial x}(a)h_1,\ \beta(h)=\frac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2+\theta_2h_2)h_2-\frac{\partial f}{\partial y}(a)h_1$

$$f(a+h)-f(a)-\frac{\partial f}{\partial x}(a)h_1-\frac{\partial f}{\partial y}(a)h_1=\alpha(h)h_1+\beta(h)h_2$$

הנגזרות החלקיות רציפות ולכן $\begin{matrix}\alpha(h)\to 0\\ \beta(h)\underset{h\to 0}{\to}0\end{matrix}$

$$||\alpha(h)h_1+\beta(h)h_2||\le|h_1|\,||\alpha(h)||+|h_2|\,||\beta(h)||\le\sqrt{||\alpha(h)||^2+||\beta(h)||^2}\sqrt{h_1^2+h_2^2}$$

$$\left|\left|\frac{\alpha(h)h_1+\beta(h)h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right|\right|\le\sqrt{||\alpha(h)||^2+||\beta(h)||^2}\xrightarrow[h\to 0]{}0$$

$$\alpha(h)h_1+\beta(h)h_2=o\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right)_{h\to 0}$$

לכן קיבלנו

$$f(a+h)-f(a)=\frac{\partial f}{\partial x}(a)h_1+\frac{\partial f}{\partial y}(a)h_2+o\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right)$$

ולכן f דיפ' בנקודה a.

עבור $m>2$

$$\begin{aligned}&f(a_1+h_1,\dots,a_n+h_n)-f(a_1,\dots,a_n)=\\&=f(a_1+h_1,\dots,a_n+h_n)-f(a_1,a_2+h_2,\dots,a_n+h_n)\\&+f(a_1,a_2+h_2,\dots,a_n+h_2)-f(a_1,a_2+h_2,\dots,a_n+h_2)\\&+f(a_1,a_2,a_3+h_3,\dots,a_n+h_n)-f(a_1,a_2,a_3+h_3,\dots,a_n+h_n)\\&+\dots+f(a_1,\dots,a_{n-1},a_n+h_n)-f(a_1,\dots,a_n)\end{aligned}$$

לפי משפט לגראנז' $f(a+h)-f(a)=\alpha_1(h)h+\dots+\alpha_n(h)h_n-\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i$ כאשר $\alpha_i\xrightarrow[h\to 0]{}0$

$$\left\|f(a+h)-f(a)-\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i\right\|\le\sqrt{\left||\alpha_1(h)|\right|^2+\cdots\left||\alpha_n|\right|^2}\sqrt{h_1^2+\dots+h_n^2}$$

$$\Rightarrow f(a+h)-f(a)-\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i=o(||h||)_{h\to 0}$$

דוגמא שבה הפונקציה דיפ' אבל התנאים לא מתקיימים

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & x^2+y^2\ne 0\\ 0 & x=y=0\end{cases}$$

$$a=(0,0)$$

דיפ'? $f(h)=\underbrace{f(0)}_{0}+\underbrace{L(h)}_{0}+\underbrace{\epsilon(h)||h||}_{\xrightarrow[h\to 0]{}0}$

$$(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}\overset{?}{=}o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

$$\frac{(x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sqrt{x^2+y^2}\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\xrightarrow[(x,y)\to 0]{}0$$

$$df_a=0$$

$\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$ לא חסומות סביב $(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$$

$$(x,y)\ne(0,0):\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}+(x^2+y^2)\cos\frac{1}{x^2+y^2}\left(-\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

$$2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}\xrightarrow[(x,y)\to 0]{}0$$

$y=0\Rightarrow -\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}$: $x=0$ לא חסומה סביב $-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$

ולכן $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ לא חסומה בסביבה של $(0,0)$.

דוגמא

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3-xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & else\end{cases}$$

$$a=(0,0)$$

1) רציפות

$$|f(x,y)|=\left|\frac{x(x^2-y)}{x^2+y^2}\right|\le\frac{|x|(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=|x|$$

ולכן רציפה $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$

2) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0),\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

$$f(x,0)=\begin{cases}x & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=1$$

$$f(0,y)=0\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$$

מועמד לדיפ' : $L(h)=h_1$

$$L(h)=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h_1+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)h_2=h_2$$

$$f(a+h)=f(a)+L(h)+\epsilon(h)||h||_{h\to 0}$$

$$\frac{h_1^3-h_1h_2^3}{h_1^2+h_2^2}=0+h_1+\epsilon(h)\sqrt{h_1^2+h_2^2}$$

נבדוק כי $\epsilon(h)\xrightarrow[h\to 0]{}0$

$$\epsilon(h)=\frac{\frac{h_1^3-h_1h_2^2}{h_1^2+h_2^2}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=\frac{h_1^3-h_1h_2^2-h_1^3-h_1h_2^2}{(h_1^2+h_2^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{-2h_1h_2^2}{(h_1^2+h_2^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\epsilon(h_1,h_1)=-\frac{2h_1^3}{(2h_1^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{h_1^3}{|h_1|^3}\underset{h_1\to 0}{\nrightarrow}0$$

כלומר f לא דיפ' ב$(0,0)$.

תרגיל בית

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x=y=0\end{cases}$$

1) $\exists \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$
2) $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ לא רציפות.

$$n = 1 : f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

משמעות גאומטרית של גזירות מישור משיק

מישור משיק

נניח ש f דיפ' בנקודה a, $m = 1$ אזי

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i) + o\left(\|x - a\|\right)_{x \to a}$$

גרף של f:

$$\boxed{\Gamma_f = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^n : (x_1, \dots x_n) \in Dom(f), x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n)\}}$$