העידון של משפט קיילי

תהי $H \le G$.

$G/_H = \{gH | g \in G\}$ מרחב המנה. (זו לא חבורת מנה אם H לא נורמלית ב $- G$).

G פועלת על $G/_H$ על ידי $g: xH \mapsto gxH$.

$Hx \mapsto Hxg$ **לא** פעולת חבורה.

$Hx \mapsto Hgx$ **לא** מוגדר היטב אם H לא נורמלית ב - G.

הפעולה מגדירה הומומורפיזם: $\psi: G \to S_{G/_H}$.

$$\ker\psi = \{g | \forall x \in G: gxH = xH\}$$

$$\begin{aligned} & gxH = xH \\ \Leftrightarrow\ & x^{-1}gxH = H \\ \Leftrightarrow\ & x^{-1}gx \in H \\ \Leftrightarrow\ & g \in xHx^{-1} \end{aligned}$$

לכן:

$$\ker\psi = \bigcap_{x \in G} xHx^{-1} \coloneqq Core(H)$$

משפט העידון של קיילי

נגדיר:

$$Core_G(H) = \bigcap_{x\in G} xHx^{-1}$$

אזי:

- $Core_G(H) \lhd G$
- $Core_G(H) \subseteq H$
- ${}^{G}\!/_{Core_G(H)} \hookrightarrow S_{G/_H}$

מסקנה

אם G פשוטה ויש לה תת חבורה מאינדקס m אז $G \hookrightarrow S_m$.

הגדרה

$$\boldsymbol{Aut(G)} = \left\{\sigma: G \to G \,\middle|\, \begin{matrix}\text{הומומורפיזם } \sigma \\ \text{חח"ע ועל}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\text{אוטומורפיזמים} \\ G \text{ של}\end{matrix}\right\}$$

דוגמא

$$Aut(\mathbb{Z}_n) \cong \mathcal{U}_n$$

הוכחה

$$\Phi: Aut(\mathbb{Z}_n) \to \mathcal{U}_n$$

על ידי $\Phi(\sigma) = \sigma(1)$;

ברור ש - $\sigma(1) \in \mathbb{Z}_n$, אבל $o\big(\sigma(1)\big) = o(1) = n$ לכן $\sigma(1) \in \mathcal{U}$.

נחשב:

$$\begin{aligned}\Phi(\sigma\tau) &= (\sigma\tau)(1) \\ &= \sigma\big(\tau(1)\big) \\ &= \sigma(\tau(1)\cdot 1) \\ &= \tau(1)\cdot\sigma(1) \\ &= \Phi(\sigma)\Phi(\tau)\end{aligned}$$

לכן Φ הומומורפיזם.

דוגמא

$$Aut(\mathbb{Z}_p \times \cdots \times \mathbb{Z}_p) \cong GL_n(\mathbb{Z}_p)$$

דוגמא

$$Aut(S_n) \cong S_n, \qquad n \neq 2,6$$

הערה

לכל $g \in G$,

$\gamma_g : x \mapsto gxg^{-1}$ הוא איבר של $Aut(G)$.

מכיוון ש - $\gamma_{gh} = \gamma_g \circ \gamma_h$ לכן $\Gamma: G \to Aut(G)$ המוגדרת על ידי $g \mapsto \gamma_g$ הומומורפיזם.

$$\ker \Gamma = \{g \in G | \gamma_g(x) = \mathrm{Id}\} \coloneqq Z(G)$$

הגדרה

$$\mathbf{Inn}(\boldsymbol{G}) = \{\gamma_g : g \in G\}$$

הערה

$$G/_{Z(G)} \cong Inn(G) \overset{*}{\trianglelefteq} Aut(G)$$

הוכחת * :

$$(\varphi \circ \gamma_g \circ \varphi^{-1})(x) = \varphi(g\varphi^{-1}(x)g^{-1}) = \varphi(g)x\varphi(g)^{-1} = \gamma_{\varphi(g)}(x)$$

הגדרה

$$Out(G) \coloneqq {}^{Aut(G)}\!/_{Inn(G)}$$

חבורת האוטומורפיזמים החיצוניים של G.

הערה

נבחר תת חבורה $H \leq G$.

$$g \in N_G(H) \Leftrightarrow \gamma_g|_H \in Aut(H)$$

הגדרנו $\Gamma_H : N_G(H) \to Aut(H)$.

$$\ker \Gamma_h = C_G(H)$$

משפט N/C

$$H \leq G: \qquad N_G(H)/C_G(H) \hookrightarrow Aut(H)$$