23.12.14 (1)

# שיטות נומריות מתקדמות - הרצאה 9

תזכורת הפרשים סופיים:

$$u_k' \sim \frac{u_{k+1}-u_{k-1}}{2\Delta x} \sim \frac{u_{k+1}-u_k}{\Delta x}$$

קירוב    הפרש מרכזי

וכו'..

## אלמנטים סופיים (שיטה נוספת לפתרון מד"ח)

מימד 1 (למעשה מד"ר עם תנאי שפה)

נסתכל על משוואה מהצורה:

$$\begin{cases} -[a(x)u']' + b(x)u = f(x) & 0<x<1 \\ u(0)=u(1)=0 & \text{תנאי שפה} \end{cases}$$

$$a\in C^1 \qquad a,b \geq 0$$

מחפשים פתרון $u(x)$ במרחב ליניארי $H$. המקיים את תנאי השפה. ולכן,

$$\forall\, v\in H \qquad v(0)=v(1)=0$$

לדוגמא: $C_2 \cap \{v(0)=v(1)=0\}$

נסמן בסיס למרחב $\{\varphi_l\}_{l=1}^{\infty}$, ונרשום:

$$u(x)=\sum_{l=1}^{\infty} \gamma_l \varphi_l(x)$$

עם מקדמים קבועים.

הערה: $u$ לאו דווקא מקיים את המד"ח. שכן זו דרישה חזקה מדי.

דוגמא לפת' לא קלא' (פתרון לא קלאסי)

Eiconal eqn. המד"ח

משוואת האיקונל $|u'|=1$

$u(0)=u(1)=0$

$u(x)=\pm x+\beta \qquad -x=\beta$    לא מקיים את התנאים

הפונקציה

$$u(x) = \begin{cases} x & 0\le x\le \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}-x & \frac{1}{2}\le x\le 1 \end{cases}$$

← מקיים את תנאי השפה ומקיים את המד"ח פרט למספר בן מניה של נק'. (כאן ב-$\frac{1}{2}$)

---

עם מ"פ (מכפלה פנימית)

נתון מרחב לינארי H נאמר כי וקטור $u\in H$ הוא פתרון חלש של המד"ח אם לכל $v\in H$

$$\langle -[au']' + bu, v\rangle = \langle f, v\rangle$$

מכאן ברור שכל פתרון קלאסי הוא גם פתרון חלש.
ניתן לכתוב את ההגדרה גם באופן הבא:

$$\langle -[au']' + bu - f, v\rangle = 0$$

האם להפסיק?

- נניח מ"פ סטנדרטית $\langle v,w\rangle = \int_0^1 v(x)w(x)\,dx$

$$-\int_0^1 [au']'v\,dx + \int_0^1 buv\,dx - \int_0^1 fv\,dx = 0$$

$$-\underbrace{[au'v]_0^1}_{=0} + \int_0^1 au'v'\,dx + \cdots$$

$$\Rightarrow \int_0^1 au'v'\,dx + \int_0^1 buv\,dx - \int_0^1 fv\,dx = 0$$

לצורך קיום האינטגרלים יש לדרוש $u,v\in L^2[0,1]$
ובנוסף $u',v'\in L^2[0,1]$

(* אין צורך ברציפות וחסימות וכו')

23.12.14 (2) למרחב הפונקציות בו גם הפונקציה וגם הנגזרת (מוגדרת כב"מ) נקרא מרחב סובולב הראשון.

מסמנים אותו ב: $H^1$ Sobolev

$$H^1=\{v : v\in L^2 \wedge v'\in L^2\}$$

לכן נעבוד ב- $H^1$. ורק הפתרונות החלשים יקבלו משמעות, אולם עדיין אין זה מבטיח שהן יהוו פתרונות קלאסיים.

- זה היה השלב הראשון בשיטת האלמנטים הסופיים.

<u>שלב שני</u>: נרצה לעבוד במרחבים סופיים ולכן נחפש פתרון בתת מרחב $H_m \subset H_0^1$ עם מימד $m$ עם בסיס $\varphi_1,\dots,\varphi_m$

$$\left(\underset{\text{תנאי שפה}}{H_0^1} = H^1 \cap \{v : v(0)=v(1)=0\}\right)$$

נגדיר את הדפקט defect (השגיאה)

$$d(u) = -[au']' + bu - f$$

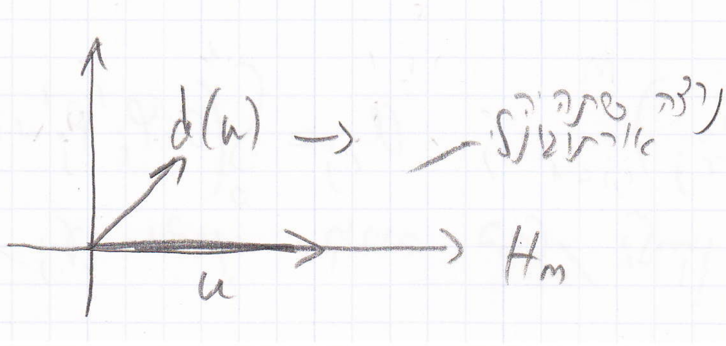
- אם קיים פתרון קלאסי st $d(u)=0$.

אחרת? ישנן כמה שיטות

- <u>שיטת גלרקין Galorcin</u>

נחפש וקטור $u\in H_m$ כך ש: $d(u)\perp H_m$

<u>לדוגמא</u>: בשני מימדים, מקרין על $H_m$



$d(u) \perp H_m$ גורר שלכל $k=1,\dots,m$

$$\langle d(u), \varphi_k \rangle = 0$$

נקראות משוואות גלרקין

$$\langle -[au']' + bu - f, \varphi_k \rangle = 0$$

$$-\int_0^1 \left(\frac{d}{dx}\left(a\frac{d}{dx}u\right)\right)\varphi_k\,dx + \int_0^1 bu\varphi_k\,dx = \int_0^1 f\varphi_k\,dx$$

אינט' בחלקים

מתאפסים השפה בגלל $\varphi$

$$\int_0^1 [au'\varphi_k' + bu\varphi_k]\,dx = \int_0^1 f\varphi_k\,dx$$

$u \in H_m$ ולכן $u = \sum_{j=1}^{m} \gamma_j \varphi_j$

נציב ונקבל:

$$\sum_{j=1}^{m} \gamma_j \int_0^1 [a\varphi_j'\varphi_k' + b\varphi_j\varphi_k]\,dx = \int_0^1 f\varphi_k\,dx$$

זו משוואה לינארית עבור $\gamma_1,\dots,\gamma_m$

נרשום אותה כ: $A\gamma = b$

$$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} \int f\varphi_1\,dx \\ \vdots \\ \int f\varphi_m\,dx \end{pmatrix}$$

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m} \; ; \quad a_{ij} = \int_0^1 (a\varphi_i'\varphi_j' + b\varphi_i\varphi_j)\,dx$$

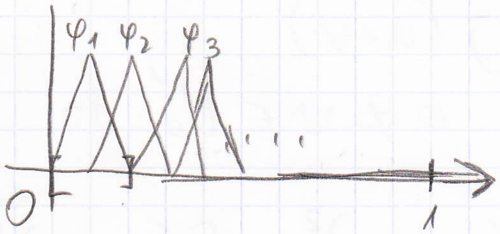
ע"י מציאת $\gamma_j$ מצאנו קירוב בשיטת גלרקין לפתרון המלא.

23.12.14 (3)

# איזה בסיס נבחר ל$H_m$?

ניתן לבחור פולינומים/פורייה ומקבלים שיטות ספקטרליות.
היתרון מתכנסות מהר לפתרון בעיקר עבור פונ' חלקות ומחזוריות. (בפורייה יש בעיה שזה החיסרון אם היא לא מחזורית נקרא תופעת גיבס)

חסרון נוכל פונ' מוגדרות על כל הקטע $[0,1]$ ויש לעשות יותר אינטגרלים. (+ פולינומים לא אורתוג' ישאירו מטריצה לא דלילה)
לכן מחפשים בסיס עם תומכים קומפקטיים.
דוגמא פשוטה: "כובעים קטנים"




(תומך קומפקטי = הסגור של כל הנק' בהן הפונ' לא מתאפסת)

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} -k + \frac{x}{h} & (k-1)h\, x \le kh \\ 1 + k - \frac{x}{h} & kh \le x \le (k+1)h \\ 0 & |x - kh| \ge h \end{cases}$$

יתרונות לבסיס כנ"ל:

- קל לחשב אינטגרלים (כל אחד על קטע קטן)
- A מטריצה דלילה. (כאשר $\varphi_i$-ים לא חופפים, האינטגרל מתאפס)
- tri-diagonal A
- גמישות בעידון של הבסיס. (אם יש אזורים שדורשים דיוק יותר גבוה ניתן להוסיף עוד פונ' באזור זה.)
  (אין דרישה לגריד אחיד) הוספת משולשים...

* ישנו שילוב של בסיס קומפקטי עם בסיס פורייה Wavelets

# גישה שונה: כתיב וריאציוני

מרחב $H_0^1$

$v \in H_0^1$ : $v', v \in L^2$ , $v(0)=v(1)=0$

נגדיר פונקציונאל:

$$J(v)=\int_0^1\left[a(x)(v'(x))^2+b(x)(v(x))^2-2f(x)v(x)\right]dx$$

נחפש מינימום של $J(v)$ ב- $H_0^1$.

נניח שמצאנו מינימום $u$. כלומר

$$J(u)\le J(u+v)\qquad \forall v\in H_0^1$$

יהי $0\ne v\in H_0^1$ , ו- $0\ne\varepsilon\in\mathbb{R}$ , נסתכל על:

$$J(u+\varepsilon v)=\int_0^1\left[a(u'+\varepsilon v')^2+b(u+\varepsilon v)^2-2f(u+\varepsilon v)\right]dx$$

$$=\overbrace{\int_0^1\left[a(u')^2+bu^2-2fu\right]dx}^{J(u)}+2\varepsilon\int_0^1\left[au'v'+buv-fv\right]dx$$

$$+\int_0^1\varepsilon^2\left[a(v')^2+bv^2\right]dx\overset{\text{כי } u \text{ מינימום}}{\ge} J(u)$$

$$\Rightarrow\ 2\varepsilon\underbrace{\int_0^1(au'v'+buv-fv)dx}_{c}+\varepsilon^2\underbrace{\int_0^1(a(v')^2+bv^2)dx}_{\ge 0}\ge 0$$

(זה נכון לכל $\varepsilon\ne 0$

- נניח $c>0$, עבור $|\varepsilon|$ קטן ושלילי אז $2\varepsilon c<0$
כי המחובר השני זניח

- אם $c<0$ עבור $|\varepsilon|$ מספיק קטן וחיובי

$$2\varepsilon c<0$$

23.12.14 (4)

לכן הדרך היחידה שבה מתקיים הנ"ל
אם $C=0$, וזה גורר

$$\forall v\in H_0^1 : \int_0^1 [au'v'+buv-fv]dx =$$

$$= \int_0^1 [-(au')'v+buv-fv]dx =$$

$$\Rightarrow \forall v\in H_0^1 \quad \langle -(au')'+bu-f, v\rangle = 0$$

כלומר $u$ הינו פתרון חלש של המד"ח.

<u>בכיוון ההפוך:</u> אם $u$ הינו פתרון חלש של המד"ח
אז לכל $v\in H_0^1$ $J(u+v)\geq J(u)$
כלומר $u$ הוא המינימום של $J$.

<u>הוכחה:</u> נקח $\varepsilon=1$

לפי מה שטענו בכיוון השני:

$$J(u+v) \overset{?}{=} J(u) + 2\cdot 1\cdot \underset{\text{פתרון חלש}}{0} + \underbrace{\int_0^1 (a(v')^2+b(v)^2)dx}_{\geq 0}$$

<u>משל.</u>

## <u>לכן ישנה שיטה של Ritz</u>
<u>נוכל לקירוב בתת-מרחב:</u>

הפתרון $\Longleftrightarrow$ מינימום של $J(v)$ ב $H_0^1$

נמצא מינימום בתת מרחב $H_m$. מינימום של $J(v)$
(בגלל שזו תבנית ריבועית יש לה מינימום)

במקרה שלנו: מה"ר שכתבנו עם תנאי שפה דיריכלה הומוגני
ב-$H_0^1$ נקבל את אותן משוואות כמו גלרקין.

$$J(v) = \int_0^1 \left[a(v')^2 + b v^2 - 2 f v\right] dx$$ ש"א

$$v = \sum_{j=1}^{m} \gamma_k \varphi_k$$

$J$ ריבועי ב $\gamma_1, \dots, \gamma_m$. כדי למצוא את המינימום
נגזור $J$ לפי $\gamma_1, \dots, \gamma_m$. ומכאן מקבלים
את המערכת הלינארית (בדוגמא זו יוצא בדיוק כמו בגלרקין).

## תנאי שפה לא הומוגניים

מוצאים פונק' $\varphi_0$ המקיימת את תנאי השפה
אך לא בהכרח את המד"ח.
נרשום
$$u = \varphi_0 + v$$
כאשר $v$ מקיימת מד"ח חדשה (צד ימין שונה)
עם תנאי שפה הומוגניים.
ולכן נפתור את הבעיה החדשה עבור $\Delta u$.
המרחבים, יסומן $H = \varphi_0 + H_0^1$, והוא נקרא
(מרחב אפיני / Affine space).

---

__הכללות:__

נתון מד"ח לינארי $\underbrace{Lu = f}_{\text{מסדר } 2\nu}$ ב- $\Omega \in \mathbb{R}^n$;

$\Omega$ תחום פתוח, קשיר ; $\partial\Omega$ רציפה.
תנאי שפה הומוגניים על $\partial\Omega$, למשל דריכלה $u(\partial\Omega) = 0$.
נסמן ב- $H^\nu$ את מרחב סובולב ה- $\nu$
כלומר: אוסף הפונק' ב- $L^2$ ש- $\nu$ הנגזרות
הראשונות שלהם ב- $L^2$.

$$\mathcal{F}\, u(x) = \hat{u}(k)$$

טרנספורם פורייה

בגלל אינטג' בחלקים אין צורך ב- $H^{2\nu}$

23.12.14 (5)

$$\hat{u}(k) = \int u(x) e^{ikx} dx$$

$$u(x) = \int \hat{u}(k) e^{-ikx} dk$$

$$u'(x) = -i \int \underbrace{\hat{u}(k)\, k}\cdot e^{-ikx} dk$$

ב-$L^2$ ישנו שוויון פרסבל/פלנשרל

$$\|u(x)\|_2 = \|\hat{u}(k)\|_2$$

במקרה שלנו:

$$\|u'(x)\|_2 = \|k\,\hat{u}(k)\|_2$$

$$\Rightarrow \|u^{(i)}(x)\|_2 = \|k^i\,\hat{u}(k)\|_2$$

ולכן

$$H^\nu = \{v : k^\nu \cdot \hat{v}(k) \in L^2\}$$

(בעצם מספיק לבדוק עבור הנגזרת ה-$\nu$ שהיא ב-$L^2$ והשאר קיימות ב-$L^2$)

זו הכללה למרחבי סובולב, המתאימה גם לנגזרת של $\nu=\frac{1}{2}$, $\nu=-1$ ודוגמאות לא טריוויאליות נוספות.

חשוב!

$$\|u(k)\|_2^2 = \int \hat{u}(k)\hat{u}^*(k)\, dk = \iiint u(x) e^{ikx} u^*(y) e^{-iky} dx\,dy\,dk$$

$$= \int e^{ik(x-y)} dk = \delta(x-y)$$ מתמשיך?

$$= \iint u(x) u^*(y)\, \delta(x-y)\, dx\, dy = \|u(x)\|_2^2$$

נסמן ב-$H_0^\nu \subset H^\nu$ אוסף כל הפונק' ב-$H^\nu$ המקיימות את תנאי השפה.

(מרחב מכפלה פנימית עם מכפ' סטנדרטי) $H_0^\nu = \{v : v \in H^\nu \wedge v(\partial\Omega) = 0\}$ למשל, פרבולה

**הגדרה:** אופרטור $L$ נקרא <u>צמוד לעצמו</u> / self-adjoint אם:

$$\forall v,w \in H_0^\nu \ : \ \langle Lv,w\rangle = \langle v, Lw\rangle$$

**הגדרה:** אופרטור $L$ נקרא <u>אליפטי</u> (elliptic) אם

$$\forall v \in H_0^\nu, \quad \langle Lv,v\rangle > 0$$

**הגדרה:** אופרטור $L$ נקרא <u>חיובי ממש</u> / positive definite אם הוא צמוד לעצמו ואליפטי.

**הגדרה:** אופרטור $L$ נקרא <u>אליפטי אחיד</u> / uniform elliptic

$$\forall v \in H_0^\nu, \exists c>0 \quad \langle Lv,v\rangle > c$$

**דוגמא:** תהי $B(x)\in M_n$ מטריצה סימטרית, ממש - וחיובית (ע"ע $>0$) לכל $x$.

$$L = -\nabla^T B(x)\nabla$$

בפרט, אם $B=id$ נקבל $L=-\Delta$

- $L$ אופרטור אליפטי שכן לכל $w$

$$\langle Lv,w\rangle = \int -[\nabla^T(B\nabla v)]w\,dx =$$

$$= -\int_\Omega \Big(\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \underbrace{\sum_j b_{ij}(x)\frac{\partial v}{\partial x_j}}\Big) w(x)\,dx =$$ אינט' בחלקים

$$L \quad \begin{pmatrix} & & \\ & b_{ij} & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial v}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum b_{1j}\frac{\partial v}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \sum b_{nj}\frac{\partial v}{\partial x_j} \end{pmatrix}$$

$$= \int_\Omega \sum_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_j} b_{ij}(x) \frac{\partial w}{\partial x_i}\,dx = \int_\Omega \underbrace{(\nabla v^T B \nabla w)}_{>0} dx$$

לכל $x$ פרט $\nabla w = 0$

23.12.14 (6)

נציב $v=w$ ונקבל

$$\langle Lv,v\rangle = \int_\Omega \underbrace{\nabla v^T B \nabla v}\, dx > 0$$

שכן $\geq 0$ פרט ל $\nabla v=0$.

לכן $L$ אליפטי.

- באותו אופן ניתן לחשב את $\langle v,Lw\rangle$

$$\langle v,Lw\rangle \underset{\text{בגלל ממשי}}{=} \langle Lw,v\rangle = \int_\Omega (\nabla w^T B \nabla v)\, dx =$$

$$= \int_\Omega \underbrace{(\nabla v^T \overset{}{\underset{B}{B^T}} \nabla w)^T}_{\text{סקלר}} dx = \int_\Omega \nabla v^T B \nabla w\, dx$$

דוגמא נוספת לאופרטור צמוד לעצמו
במימד 1

$$-\frac{d}{dx}\left[a(x)\frac{d}{dx}\right] + b(x)$$

דוגמא שעברנו עליה בתחילת השעור.