

חשבון אינפיניטסימלי 3 (88-230-05)
מועד א', תשע"ג

המרצה: פרופ' אנדריי לרנר

משך המבחן: 2.5 שעות

אין להשתמש בחומר עזר או במחשבון

1. (20 נק') תהי

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{z \sin(xy)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/3}}, & (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0, & (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

(א) מצא $\frac{\partial f}{\partial x}$

(ב) האם f דיפרנציאבילית ב- $(0, 0, 0)$?

2. (20 נק') תהי $f(x, y)$ פונקציה המקיימת $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ נגדיר

$$g(x, y) = f\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}\right)$$

הראה ש- g גם מקיימת $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$

3. (20 נק') הראה שהמערכת

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{1}{2}z^2 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

בסביבת הנקודה $A = (1, -1, 2)$ מגדירה את פונקציות $x = x(z)$ ו- $y = y(z)$

בצורה סתומה. מצא את $\frac{dx}{dz}(2)$, $\frac{dy}{dz}(2)$ ו- $\frac{d^2x}{dz^2}(2)$

4. (בחר (א) או (ב))

(א) (17 נק') מצא את אקסטרמום מקומי של הפונקציה $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ תחת האילוץ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $(a > b > c > 0)$.

(ב) (21 נק') מצא את הנקודות הקריטיות של הפונקציה וסווג אותן:

$$f(x, y) = x^3y^2(1 - x - y)$$

5. בחר (א) או (ב):

(א) (17 נק') חשב

$$\int_0^\pi \int_0^\pi |\cos(x+y)| dx dy$$

(ב) (21 נק') חשב נפח הגוף $E \subset \mathbb{R}^3$ החסום על ידי

$$z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = x, x^2 + y^2 = 2x, z = 0$$

בהצלחה!