הרצאה 22

נכתב על ידי נועם יערי

24.01.2017

הגדרה

סדרה של תת חבורות היא "**סדרה תת – נורמלית**" היא:

$$1 = G_n \lhd \cdots \lhd G_3 \lhd G_2 \lhd G_1 \lhd G_0 = G$$

(לכל i, מתקיים $G_i \lhd G_{i-1}$ ויתכן $G_i \ntriangleleft G$)

עידון של סדרה תת – נורמלית:

$$\cdots \lhd G_i \lhd G_{i-1} \lhd \cdots$$

יעודן ל – :

$$\cdots \lhd G_i \lhd H \lhd G_{i-1} \lhd \cdots$$

כאשר $G_i \neq H \neq G_{i-1}$.

הערה

אם אפשר לעדן,

$$1 \neq {}^{H}\!/_{G_i} \lhd {}^{G_{i-1}}\!/_{G_i}$$

כאשר ${}^{H}\!/_{G_i} \neq {}^{G_{i-1}}\!/_{G_i}$.

אפשר לעדן בנקודה i אם ורק אם ${}^{G_{i-1}}\!/_{G}$ אינה פשוטה.

הגדרה

סדרת הרכב היא סדרה תת נורמלית עם מנות פשוטות, כלומר, זוהי סדרה תת נורמלית שלא ניתן לעדן.

דוגמא

$$1 \lhd \mathbb{Z}_2 \lhd K_4 \lhd A_4 \lhd S_4$$

$$1 \lhd A_3 \lhd S_3$$

$$1 \lhd S_2$$

$$1 \lhd A_5 \lhd S_5$$

הערה

לחבורה סופית יש סדרת הרכב.

יכולות להיות כמה, לדוגמא:

$$0 \lhd 3\mathbb{Z}_6 \lhd \mathbb{Z}_6$$
$$0 \lhd 2\mathbb{Z}_6 \lhd \mathbb{Z}_6$$

משפט ז'ורדן - הולדר

לכל חבורה סופית, גורמי ההרכב (= המנות של סדרת ההרכב) יחידות עד כדי סדר.

הוכחה

באינדוקציה על סדר החבורה.

יהיו שתי סדרות הרכב של G:

$$1 \lhd \begin{matrix} \cdots & \lhd & A_2 & \lhd & A_1 \\ \cdots & \lhd & B_2 & \lhd & B_1 \end{matrix} \lhd G$$

- <u>מקרה ראשון - $A_1 = B_1$</u> ברור.
- <u>מקרה שני - $A_1 \neq B_1$</u>

  אזי $G = A_1B_1$.

$$\begin{aligned} &(1 \to A \to G) = (1 \to A) + (A \to G) \\ &\sim (1 \to A_1 \cap B_1) + (A_1 \cap B_1 \to A_1) + (A_1 \to G) \\ &= (1 \to A_1 \cap B_1) + (A_1 \cap B_1 \to B_1) + (B_1 \to G) \\ &= (1 \to B_1) + (B_1 \to G) = (1 \to B_1 \to G) \end{aligned}$$

$\square$

הגדרה

חבורה G היא **פתירה** אם כל גורמי ההרכב שלה ציקליים מסדר ראשוני.

טענה

תהי G חבורה עם תת חבורה נורמלית N.

G פתירה $\Leftrightarrow$ N פתירה וגם G/N פתירה

הוכחה

אפשר לעדן את $G \rhd N \rhd 1$ לסדרת ההרכבה:

$$1 \lhd \cdots \lhd N \lhd \cdots \lhd G$$

$$1 \lhd \cdots \lhd {}^{G}\!/_{N}$$

נניח ש - $G_0 \rhd \cdots \rhd G_{k-1} \rhd G_k$ סדרת הרכב, כאשר $G_0 \rhd G_k$.

אזי:

$$1 \lhd {}^{G_{k-1}}\!/_{G_k} \lhd {}^{G_{k-2}}\!/_{G_k} \lhd \cdots \lhd {}^{G_0}\!/_{G_k}$$

סדרת הרכב עם אותן מנות.

כלומר:

אוסף החבורות הפתירות סגור ל – :

- ת"ח,
- הטלות,
- הרחבות

טענה

כל תת חבורה של חבורה פתירה היא פתירה.

הגדרה

תהי G חבורה. נגדיר את ה**קומוטטור של a ו – b**:

$$[a,b] = aba^{-1}b^{-1}, \qquad (a,b \in G)$$

$$ab = ba \Leftrightarrow [a,b] = 1$$

ונגדיר את **תת חבורת הקומוטטורים של G**:

$$G' = \langle [a,b] | a,b \in G \rangle$$

תכונות

1. $G' \lhd G$.
2. ${}^{G}\!/_{G'}$ אבלית.
3. לכל $K \lhd G$, ${}^{G}\!/_{K}$ אבלית $\Leftrightarrow G' \subseteq K$ (${}^{G}\!/_{K}$ מנה של ${}^{G}\!/_{G'}$).
4. ${}^{G}\!/_{G'}$ - המנה האבלית המקסימלית.

הוכחה

1. $g[a,b]g^{-1} = [gag^{-1}, gbg^{-1}]$
2. לכל $aG', bG' \in G/_{G'}$, $[aG', bG'] = [a,b]G' = G'$.
3. $G/_K$ אבלית $\Leftrightarrow \left(G/_K\right)' = 1 \Leftrightarrow G'K/_K$ $\Leftrightarrow G' \subseteq K$.

הגדרה

$$G^{(0)} = G$$
$$G^{(n)} = \left(G^{(n-1)}\right)'$$

$$\cdots \lhd G''' \lhd G'' \lhd G' \lhd G$$

זו **סדרה תת – נורמלית**, עם מנות אבליות.

משפט

G פתירה אם ורק אם קיים n כך שמתקיים:

$$G^{(n)} = 1$$