מרצה: מיכאל מגרל megereli@math.biu.ac.il אתר המרצה אתר הקורס wiki סילבוס

מידע נוסף על טופולוגית מנה

יריעות מסוימות כמנה של ריבוע

הגדרה: **יריעה** בעלת מימד n היא מרחב האוסדורף, שמקיים את אקסיומת המנייה השנייה, בעל התכונה שלכל נקודה במרחב יש סביבה שהומיאומורפית לחצי-מרחב

$$H := \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 \le x_n\}$$

אם במקום H אפשר לקחת $\mathbb{R}^n$ אז אומרים **יריעה ללא שפה**.

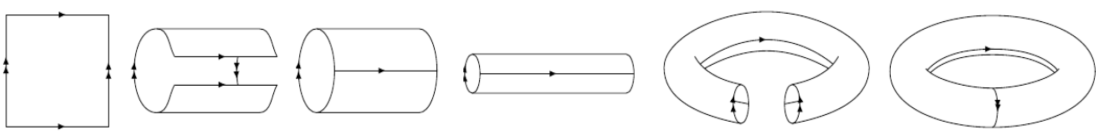
למשל: כל קבוצה פתוחה ב $\mathbb{R}^n$ יריעה בעל מימד n, מעגל, טורוס ... יריעה ללא שפה.

כדור סגור ב $\mathbb{R}^n$ יריעה בעל מימד n עם שפה. ריבוע יריעה בעל מימד 2 עם שפה.

נראה כמה דוגמאות של יריעות 2-ממדיות שמתקבלות כמנה של ריבוע.

- טורוס דו-ממדי T^2 2-dimensional torus

אפשר לקבל אותו כמנה של גליל (שלב ביניים)



This image from http://i.stack.imgur.com/FJaFe.png.

תרגיל: הוכיחו $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \cong T^2$

$$\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = \{(x,y)+\mathbb{Z}^2 \mid x,y \in \mathbb{R}\}$$

(קבוצת מנה של מחלקות ב $\mathbb{R}^2$ מודולו $\mathbb{Z}^2$ עם טופולוגית מנה).

פתרון: נתחיל מהפונקציה $f(x,y) = (cis2\pi x, cis2\pi y)$ $f:\mathbb{R}^2 \to T^2$.

צמצום הפונקציה $f:[0,1]^2 \to T^2$ פונקצית מנה. לכן לפי **משפט** (תנאי מספיק "צמצום") גם $f:\mathbb{R}^2 \to T^2$ מנה.

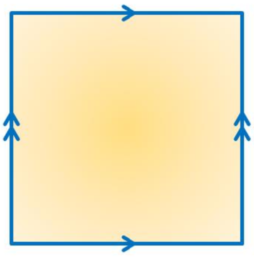
כעת לפי **משפט** (קריטריון למנה) נקבל $\mathbb{R}^2/\sim_f \cong T^2$.

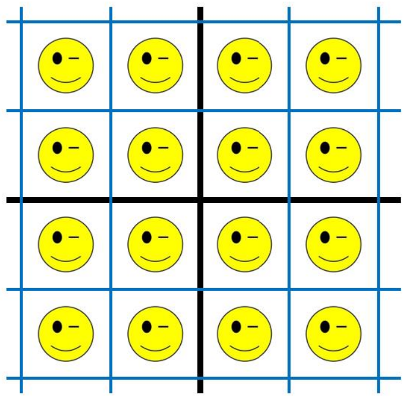
כאן יחס שקילות מתאימה היא $\forall n,m \in \mathbb{Z} \quad (a,b) \sim_f (a+n,b+m)$ המחלקות

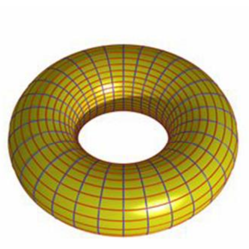
הן $\{(x,y)+\mathbb{Z}^2 \mid (x,y)\in\mathbb{R}^2\}$. לכן קבוצת מנה מתאימה היא בדיוק $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

לכן מרחב מנה $\mathbb{R}^2/\sim_f$ כאן הוא בעצם $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \cong T^2$.

כבר הוכחנו הומאומורפיזם $\mathbb{R}^2/\sim_f \cong T^2$. לכן גם $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \cong T^2$.

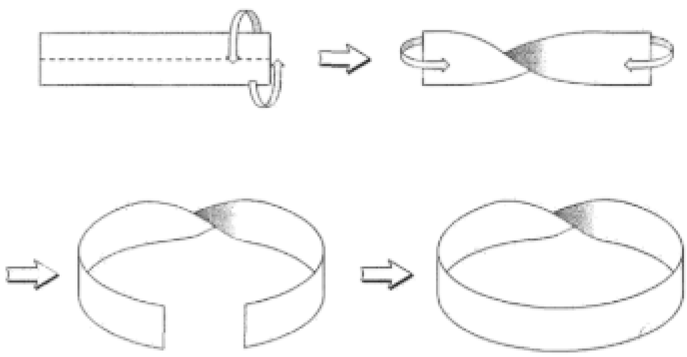




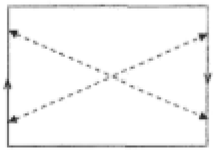


מידע: מי שלמד תורת החבורות בהחלט מבין שקבוצת מנה $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ היא חבורת מנה. בשפה יותר מתמטית כאן מדובר על איזומורפיזם של חבורות טופולוגיות $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \cong T^2$

- Mobius strip   טבעת מוביוס

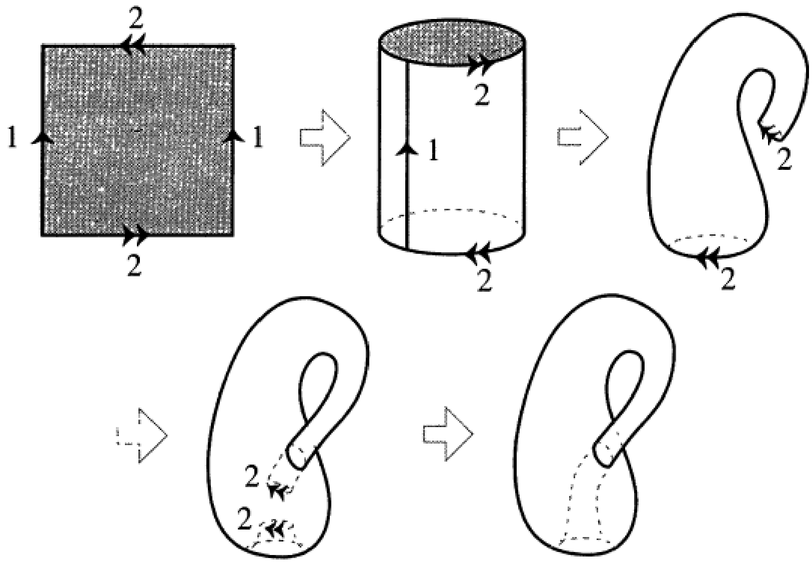


משוכן לתוך $\mathbb{R}^3$. הוא 2-ממדי. ללא אוריאנטציה. אפשר לקבל אותו גם כך



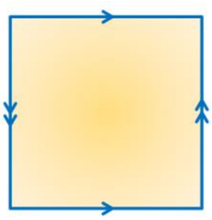
- בקבוק קליין   Klein bottle

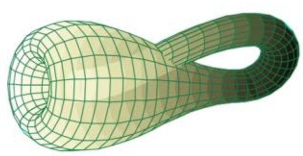
אפשר לקבל אותו כמנה של ריבוע

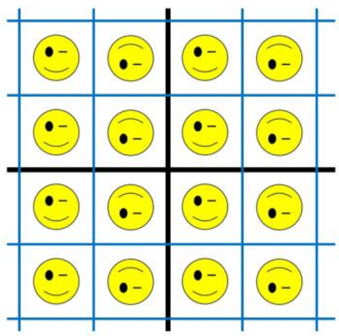


לא ניתן לשכן לתוך $\mathbb{R}^3$.

אפשר לקבל אותו דרך הדבקת שפות של שתי טבעות מוביוס.



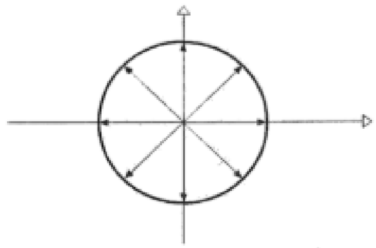




• מרחב פרוייקטיבי Projective space

P^n = מרחב קווים ישרים ב $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ שעוברים דרך 0.

$q:\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}\to P^n$ פונקצית מנה



צמצום של הפונקציה הנ"ל $q_S:S^n\to P^n$ על ספירה יחידה n-ממדית מוכיח שאכן q מנה

בגלל תוצאה של ה **משפט:** תנאי מספיק "צמצום"

כאן יחס שקילות שמתקבל על S^n הוא $-v\sim v$ (antipodal points)

$q:\mathbb{R}^2\setminus\{0\}\to P^1$ מקרה פרטי **Projective line**

טענה: P^1 הומיואומורפי למעגל S^1.

הסבר: שקול לדבר על מישור $\mathbb{R}^2$ כמרחב מספרים מרוכבים $\mathbb{C}$. ובמקום S^1 על T.

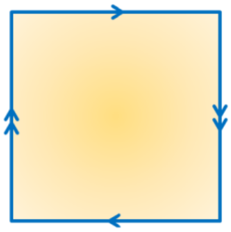
נגדיר (תרגיל שהיה) $f:T\to T, f(v)=v^2$ היא פונקצית מנה (פונקציה רציפה ועל מקומפקטי להאוסדופי). היא מגדירה יחס שקילות בדיוק $v\sim -v$.

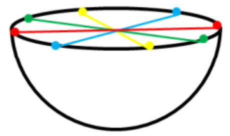
מישור פרוייקטיבי **Projective plane**

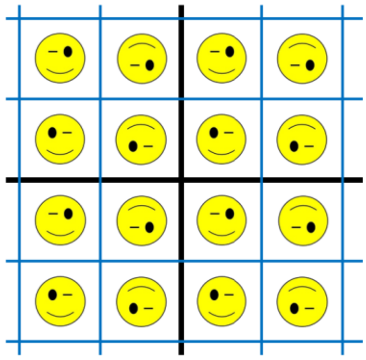
P^2 = מרחב קווים ישרים (מנוקבים) ב $\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$ שעוברים דרך 0.

אפשר לקבל דרך $q_S:S^2\to P^2$

אפשרויות נוספות: כמנה של ריבוע, כמנה של חצי-ספירה, כמנה של מישור







סיכום: מנות מסוימות של ריבוע