נכתב על ידי נועם יערי

וריאציית מקדמים

בהינתן
$$Y=\begin{pmatrix}(y_1)_1 & (y_2)_1 & \cdots & (y_n)_1\\ (y_1)_2 & \ddots & \cdots & (y_n)_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ (y_1)_n & (y_2)_n & \cdots & (y_n)_n\end{pmatrix}$$

כלומר, בהינתן בסיס למרחב הפתרונות למערכת ההומוגנית $\vec{y}'=A(x)\vec{y}+\vec{b}(x)$.

הערה: לכל וקטור של קבועים $\vec{C}=\begin{pmatrix}C_1\\C_2\\\vdots\\C_n\end{pmatrix}$:

$$Y\vec{C}=\begin{pmatrix}(y_1)_1 & (y_2)_1 & \cdots & (y_n)_1\\ (y_1)_2 & \ddots & \cdots & (y_n)_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ (y_1)_n & (y_2)_n & \cdots & (y_n)_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\C_2\\\vdots\\C_n\end{pmatrix}=C_1\overrightarrow{y_1}+C_2\overrightarrow{y_2}+\cdots+C_n\overrightarrow{y_n}$$

הוא גם פתרון למערכת ההומוגנית.

אם נציב $Y(x)\cdot\vec{C}(x)$ ונגזור נקבל:

$$\left(Y(x)\cdot\vec{C}(x)\right)'=Y'(x)\vec{C}(x)+Y(x)\vec{C}'(x)=A(x)Y(x)\vec{C}(x)+Y(X)\vec{C}'(x)$$

$$=A(x)(\text{פתרון})+\vec{b}(x)$$

$\Leftarrow$ ננצח אם $Y(x)\cdot\vec{C}'(x)=\vec{b}(x)\Leftrightarrow\vec{C}'(x)=Y^{-1}(x)\vec{b}(x)$.

דוגמה

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$$

בסיס אפשרי לפתרונות ההומוגניים הוא:

$$\left\{\begin{pmatrix} e^{2x} \\ -2e^{2x} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{x} \\ -e^{x} \end{pmatrix}\right\}$$

נמצא עכשיו פתרון כללי למערכת האי הומוגנית עבור $\vec{b}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$

$$Y = \begin{pmatrix} e^{2x} & e^{x} \\ -2e^{2x} & -e^{x} \end{pmatrix},$$

$$\det Y = e^{3x}$$

$$Y^{-1} = e^{-3x}\begin{pmatrix} -e^{x} & -e^{x} \\ 2e^{2x} & e^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-2x} & -e^{-2x} \\ 2e^{-x} & e^{-x} \end{pmatrix}$$

לכן מווריאציית מקדמים:

$$\vec{y} = C_1(x)\begin{pmatrix} e^{2x} \\ -2e^{2x} \end{pmatrix} + C_2(x)\begin{pmatrix} e^{x} \\ -e^{x} \end{pmatrix}$$

כאשר:

$$\begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = Y^{-1} \cdot \vec{b}(x) = \begin{pmatrix} -e^{-2x} & -e^{-2x} \\ 2e^{-x} & e^{-x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(1+x)e^{-2x} \\ (2+x)e^{-x} \end{pmatrix}$$

$$C_1(x) = \int -(1+x)e^{-2x}dx + K_1$$

$$C_2(x) = \int (2+x)e^{-x}dx + K_2$$

$$C_1(x) = -\int e^{-2x}dx - \int xe^{-2x}dx = \frac{1}{2}e^{-2x} - \left[-\frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}dx\right] =$$

$$= \frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{4}e^{-2x} + K_1 = \frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{3}{4}e^{-2x} + K_1$$

$$C_2(x) = \int 2e^{-x}dx + \int xe^{-x}dx = -2e^{-x} + (-x)e^{-x} + \int e^{-x}dx =$$

$$= -3e^{-x} - xe^{-x} + K_2$$

לכן פתרון כללי למשוואה האי הומוגנית היא:

$$Y(x) \cdot \begin{pmatrix} C_1(x) \\ C_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2x} & e^{x} \\ -2e^{2x} & -e^{x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{3}{4}e^{-2x} + K_1 \\ -3e^{-x} - xe^{-x} + K_2 \end{pmatrix} = \cdots =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x - \frac{9}{4} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} + K_1 \cdot \begin{pmatrix} e^{2x} \\ -2e^{2x} \end{pmatrix} + K_2 \cdot \begin{pmatrix} e^{x} \\ -e^{x} \end{pmatrix}$$