אנליזה הרמונית - תרגול מס' 2

יובל חצ'טריאן

6 בנובמבר 2017

1 חישוב בסיסי של אינטגרלים ממשיים בעזרת מרוכבים.

ראשית, נביא כלל ממרוכבים שמאפשר לנו לחשב איטנגרלים של פונקציות עם ערכים מרוכבים.

עובדה 1.1 נניח ש $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ פונקציה גזירה (המשפט נכון גם אם נחליף את התחום מ $\mathbb{C}$ בכל תחום אחר $U\subseteq\mathbb{C}$) ומתקיים $f'(z)=g(z)$. אזי $\int_a^b g(x)\mathbf{d}x=f(b)-f(a)$. (כאן הגכוונה לאינגרל ממשי רגיל, כלמר

$$.(\int_a^b g(x)\,\mathbf{d}x=\int_a^b \mathbf{Re}g(x)\,\mathbf{d}x+i\int_a^b \mathbf{Im}g(x)\,\mathbf{d}x$$

דוגמא 1.2 כך למשל, $\int_a^b e^{zx}\mathbf{d}x=\frac{1}{z}\left(e^{zb}-e^{za}\right)$ כלל $z\in\mathbb{C}$.

עובדה 1.3 את הפונקציות הטריגונומטריות הידועות ניתן לבטא גם באופן הבא:

$$\cos(x)=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$$
$$\sin(x)=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}$$

העובדה מהמרוכבים וזהות מקלות לעיתים קרובות חישוב של אינטגרלים ממשיים, במיוחד אלה שכוללים בתוכם פונקציות טריגונומטריות וחזקות של e. על מנת להדגים את השיטה נחשב את פיתוח פורייה של הפונקציה $e^{-|x|}$.

דוגמא 1.4 חשבו את הפיתוח פורייה של הפונקציה $e^{-|x|}$.

פתרון: כיוון שהפונקציה זוגית הפיתוח פורייה שלה הוא טור קוסינוסים, כלמר

$$.e^{-|x|}\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$$

נעבור לחשב את המתקדמים.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-|x|}\mathbf{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}e^{-x}\mathbf{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}e^{-x}\mathbf{d}x$$
$$=\frac{2}{\pi}\left(1-e^{-\pi}\right)$$

כאן השתמשנו בעובדה שהפונקציה זוגית וחישבנו אינטגרל על חצי קטע והכפלנו אותו ב 2. על מנת לחשב את שאר המקדמים נשתמש בזהויות שעליהן דיברנו.

$$.a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-|x|}\cos nx\mathbf{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-|x|}\mathbf{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-x}\cos nx\mathbf{d}x$$

שוב השתמשנו בזוגיות של הפונקציה ובהגדרה של ערך מוחלט בשביל המעברים. עכשו נשתמש בזהות על e והפונקציות הטריגונומטריות.

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-x}\cos nx\mathbf{d}x &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-x}\left(\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}\right)\mathbf{d}x = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} e^{-x+inx}\mathbf{d}x + \int_0^{\pi} e^{-x-inx}\mathbf{d}x\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\left.\frac{e^{-x+inx}}{-1+in}\right|_0^{\pi} + \left.\frac{e^{-x-inx}}{-1-in}\right|_0^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{e^{-\pi}(-1)^n-1}{-1+in} + \frac{e^{-\pi}(-1)^n-1}{-1-in}\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\left(e^{-\pi}(-1)^n-1\right)\left(\frac{-1-in}{1+n^2}+\frac{-1+in}{1+n^2}\right) = \frac{1}{\pi}\left(e^{-\pi}(-1)^n-1\right)\frac{(-2)}{1+n^2}\\
&= \frac{2}{\pi(1+n^2)}\left(1-(-1)^n e^{-\pi}\right)
\end{aligned}$$

הטור שנקבל הינו

$$.e^{-|x|} = \frac{1}{\pi}\left(1-e^{-\pi}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi(1+n^2)}\left(1-(-1)^n e^{-\pi}\right)\cos nx$$

2 טור פורייה מרוכב.

הגדרה 2.1 טור פורייה מרורכב של פונקציה רציפה למקוטעין f בקטע $[-\pi,\pi]$ הינו

$$f \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}e^{-inx}$$

כאשר

$$.c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\mathbf{d}x$$

דוגמא 2.2 פתחו את הפונקציה x לטור פורייה מרוכב.

פתרון: עבור $n\neq 0$ נקבל

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xe^{-inx}\mathbf{d}x = \frac{1}{2\pi}\left(-\left.\frac{xe^{-inx}}{in}\right|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{in}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}\mathbf{d}x\right)\\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\left.\frac{ixe^{inx}}{n}\right|_{-\pi}^{\pi}\right) = \frac{2i\pi(-1)^n}{2\pi n} = \frac{i(-1)^n}{n}
\end{aligned}$$

עבור $n=0$ נקבל $c_0=0$ מכיוון ש x היא פונקציה אי ־ זוגית.

2.1 הקשר בין פיתוח מרוכב לפיתוח רגיל.

נשים לב ש

$$\begin{aligned}
c_n + c_{-n} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\mathbf{d}x + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{inx}\mathbf{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left(\frac{e^{-inx}+e^{inx}}{2}\right)\mathbf{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathbf{d}x = a_n \\
c_{-n} - c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{inx}\mathbf{d}x - f(x)\, e^{-inx}\mathbf{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2}\mathbf{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, i\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}\mathbf{d}x \\
&= \frac{i}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\mathbf{d}x = ib_n
\end{aligned}$$

באופן דומה ניתן לשחזר את c_n מ a_n ו b_n דהיינו: עבור $n \geq 0$

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left(\cos nx - i\sin nx\right)\mathbf{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int f(x)\cos nx\mathbf{d}x - i\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathbf{d}x \\
&= \frac{1}{2}a_n - \frac{i}{2}b_n
\end{aligned}$$

ובאותו אופן, עבור $-n$ נקבל

$$c_{-n} = a_n + ib_n$$

3 פיתוח פורייה בקטע כללי.

נניח ש f היא פונקציה רציפה למקוטעין בקטע $\left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right]$. אזי פיתוח פורייה שלה אפשר להביע באופן הבא. בעזרת החלפת משתנים נהפוך אותה לפונקציה בקטע $[-\pi, \pi]$ ונגיר

$$g(t) = f\left(\frac{Lx}{2\pi}\right) \Leftrightarrow f(x) = g\left(\frac{2\pi L}{x}\right)$$

מקדמי פורייה של $g(x)$ הינם

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos nx\mathbf{d}x\; n = 0, 1, 2 \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin nx\mathbf{d}x\; n = 1, 2, \ldots
\end{aligned}$$

אם נחזור חזרה לקטע המקורי נראה שלמעשה אפשר לרשום

$$f\left(x\right)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{2\pi nx}{L}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{2\pi nx}{L}$$

כלמר את f ניתן לפתח לטור של קוסינוסים וסינוסים גם כן, אלא צריך "לרנממל את המחזור שלהם".

עכשו נרצה לבטא את a_n ו b_n כאיטנגרלים אם $\cos\frac{2\pi nx}{L}$ ו $\sin\frac{2\pi nx}{L}$. זאת אפשר לעשות בקלות על ידי החלפת משתנים חזרה

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g\left(x\right)\cos nx\mathbf{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{Lx}{2\pi}\right)\cos nx\mathbf{d}x=\frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2}f\left(t\right)\cos\frac{2\pi nt}{L}\mathbf{d}t$$

באופן דומה נקבל

$$.b_n=\frac{2}{L}\int_{L/2}^{L/2}f\left(t\right)\sin\left(\frac{2\pi nt}{L}\right)\mathbf{d}t$$

על ידי המשחה מחזורית נקבל פיתוח פירייה כללי עבור קטע $[a,b]$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{b-a}\int_a^b f\left(x\right)\cos\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right)\mathbf{d}x\\ b_n&=\frac{2}{b-a}\int_a^b f\left(x\right)\sin\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right)\mathbf{d}x\end{aligned}$$

דוגמא 3.1 מצאו פיתוח פורייה של הפונקציה $f\left(x\right)=\min\left\{1,|x|\right\}$ בקטע $[-c,c]$.

פתרון: פונקציה זוגית ולכן נקבל טור קוסינוסים. נחשב את המקדמים

$$\begin{aligned}a_0&=\frac{1}{c}\int_{-c}^{c}f\left(x\right)\mathbf{d}x=\frac{2}{c}\int_0^{\pi}f\left(x\right)\mathbf{d}x=\frac{2}{c}\int_0^1 x\mathbf{d}x+\frac{2}{c}\int_1^c 1\mathbf{d}x\\ &=\frac{2}{c}\left(\frac{1}{2}+c-1\right)=\frac{2}{c}\left(c-\frac{1}{2}\right)=2-\frac{1}{c}\\ a_n&=\frac{1}{c}\int_{-c}^{c}f\left(x\right)\mathbf{d}x=\frac{2}{c}\int_0^{\pi}f\left(x\right)\cos\left(\frac{\pi nx}{c}\right)\mathbf{d}x\\ &=\frac{2}{c}\left(\int_0^1 x\cos\left(\frac{\pi nx}{c}\right)\mathbf{d}x+\int_1^c\cos\left(\frac{\pi nx}{c}\right)\mathbf{d}x\right)\\ &=\frac{2}{c}\left(\frac{c}{\pi n}\left(x\sin\left(\frac{\pi nx}{c}\right)\Big|_0^1-\int_1^{\pi}\sin\left(\frac{\pi nx}{c}\right)+\sin\left(\frac{\pi nx}{c}\right)\Big|_1^c\right)\right)\\ &=\frac{2}{\pi n}\left(\sin\left(\frac{\pi n}{c}\right)+\sin\left(\frac{\pi nx}{c}\right)\Big|_1^c+\frac{c}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi nx}{c}\right)\Big|_1^c\right)\\ &=\frac{2c}{\left(\pi n\right)^2}\left(\left(-1\right)^n-\cos\left(\frac{\pi n}{c}\right)\right)\end{aligned}$$

4 פיתוח לטורי סינוסים וקוסינוסים.

אם מוגדרת פונקציה בקטע $[0,c]$ ניתן להרחיב אותה לפונקציה על קטע $[-c,c]$ בשני אופנים המשכה זוגית או אי־זוגית.

הגדרה 4.1 תהי f פונקציה $f:[0,c]\to\mathbb{C}$. ההמשכה הזוגית של שלה היא הפונקציה הזוגית $g:[-c,c]\to\mathbb{C}$ המוגדרת באופן הבא:

$$g\left(x\right)=\begin{cases} f\left(x\right) & x\geq0\\ f\left(-x\right) & x\leq0 \end{cases}$$

ההמשכה האי זוגית שלה היא הפונקציה האי־זוגית $h:[-c,c]\to\mathbb{C}$ המוגדרת על ידי

$$h\left(x\right)=\begin{cases} f\left(x\right) & x>0\\ 0 & x=0\\ -f\left(-x\right) & x<0 \end{cases}$$

נשים לב שטור הפורייה של $g\left(x\right)$ הינו טור קוסינוסים וטור הפורייה של $h\left(x\right)$ הוא טור סינוסים. הטור המתאים ל $g\left(x\right)$ נקרא טור קוסינוסים של f והטור המתאים ל $h\left(x\right)$ נקרא טור הסינוסים של f.

המשפט הבא מסכם את התנאים בהם יש התכנסות נקודתית של הטור פורייה לפונקציה.

משפט 4.2 (דיריכלה) תהי f פונקציה כך ש

1. f רציפה למקוטעין בקטע $[a,b]$.
2. לכל $x\in[a,b)$, הגבול הבא קיים וסופי

$$\lim_{h\to0^{+}}\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x^{+}\right)}{h}$$

כאשר $f\left(x^{+}\right)=\lim_{h\to0^{+}}f\left(x+h\right)$ כלומר הגבול הימני של f ב x.

3. לכל $x\in(a,b]$ הגבול הבא קיים וסופי

$$\lim_{h\to0^{+}}\frac{f\left(x^{-}\right)-f\left(x-h\right)}{h}$$

כאשר $f\left(x^{-}\right)$ הוא הגבול השמאלי של f ב x.

$$\lim_{h\to0^{-}}f\left(x+h\right)$$

אזי לכל $x\in(a,b)$ הטור פורייה של f מתכנס ל $\frac{f(x^{+})+f(x^{-})}{2}$ ובקצוות הקטע הוא מתכנס ל $\frac{f(a^{+})+f(b^{-})}{2}$.

הערה 4.3 למעשה הקצוות של הקטע הם מקרה פרטי, אם מניחים ש f מוגדרת על כל $\mathbb{R}$ עם מחזור $b-a$. בנוסף, אם f רציפה ב $[a,b]$ ו $f\left(a\right)=f\left(b\right)$ אזי הטור מתכנס נקודתית ל f בכל הקטע $[a,b]$.

חשיבות הטורי סינוסים וקוסינוסים היא שאפשר למצוא טורים פשוטים יחסית שמתכנסים לפונקציה שלנו כמעט בכל נקודה אם היא מקיימת תנאים של המשפט.

נפתח את הנוסחה לטור סינוסים ולטור קוסיניסס בקטע $[0,c]$.

נשים לב שעבור שטור קוסינוסים של $f(x)$ הוא הטור של $g(x)$ וטור הקוסינוסים של $f(x)$ הוא הטור של $h(x)$. לכן נקבל:

$$g(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

כאשר

$$a_n = \frac{1}{c}\int_{-c}^{c} g(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{c}\right)\mathbf{d}x = \frac{2}{c}\int_{0}^{c} g(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{c}\right)\mathbf{d}x = \frac{2}{c}\int_{0}^{c} f(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{c}\right)\mathbf{d}x$$

באופן דומה

$$h(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos nx$$

ו

$$b_n = \frac{1}{c}\int_{-c}^{c} h(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{c}\right)\mathbf{d}x = \frac{2}{c}\int_{0}^{c} h(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{x}\right)\mathbf{d}x = \frac{2}{c}\int_{0}^{c} h(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{c}\right)\mathbf{d}x$$

דוגמא 4.4 פתחו את הפקונציה $\sin(x)$ לטור קוסינוסים בקטע $[0,\pi]$.

פתרון:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x\mathbf{d}x = \frac{2}{\pi}(-\cos x)|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}(-2) = \frac{4}{\pi}\\
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x\cos nx\mathbf{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\sin(n+1)x + \sin(1-n)x)\mathbf{d}x\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(n+1)x\mathbf{d}x + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(1-n)x\mathbf{d}x\\
&= \frac{1}{\pi}\frac{\cos(n+1)x}{n+1}\bigg|_0^{\pi} + \frac{1}{\pi}\frac{\cos(n-1)x}{1-n}\bigg|_0^{\pi}\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^{n+1}-1}{n+1} + \frac{(-1)^{n-1}}{n-1}\right)\\
&= \frac{1}{\pi}(1-(-1)^n)\frac{(-2)}{(n^2-1)} = \frac{2\left((-1)^{n+1}-1\right)}{(n^2-1)\pi}\\
&= \begin{cases} -\frac{4}{\pi(n^2-1)} & n\,is\,even\\ 0 & n\,is\,odd\end{cases}
\end{aligned}$$

הטור שנקבל הינו

$$.\frac{2}{\pi} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(4n^2-1)}\cos 2nx$$