תרגיל 6 טופולוגיה תשע"ו

6 באפריל 2016

1. יהי X מרחב טופולוגי, ותהיינה $A,B\subseteq X$. הוכיחו או הפריכו:
   (א) $cl\left(A\cap B\right)\subseteq cl\left(A\right)\cap cl\left(B\right)$.
   (ב) $cl\left(A\cap B\right)\supseteq cl\left(A\right)\cap cl\left(B\right)$.
   (ג) $int\left(A\cup B\right)\subseteq int\left(A\right)\cup int\left(B\right)$.
   (ד) $int\left(A\cup B\right)\supseteq int\left(A\right)\cup int\left(B\right)$.

2. יהי X מרחב מטרי. יהי $a\in X$ ויהי $r>0$.
   (א) הוכיחו שאם X מרחב נורמי, אזי $cl\left(B\left(a,r\right)\right)=B\left[a,r\right]$.
   (ב) מצאו דוגמה נגדית למקרה בו X אינו מרחב נורמי.

3. יהי X מרחב טופולוגי ותהי $A\subseteq X$. האם $cl\left(int\left(A\right)\right)=cl\left(A\right)$?

4. יהי X מרחב טופולוגי. ותהיינה $A,B\subseteq X$ קבוצות קשירות.
   (א) האם $int\left(A\right)$ קשירה?
   (ב) נניח ש-$A\cap B\neq\emptyset$. האם $int\left(A\cup B\right)$ קשירה?

5. על $\mathbb{R}$ נגדיר טופולוגיה τ באופן הבא:

$$\tau=\left\{ O\subseteq X|\left|O^{c}\right|\leq\aleph_{0}\right\} \cup\left\{ \emptyset\right\}$$

   זו טופולוגיית הקו־מניה.
   (א) הוכיחו שזו אכן טופולוגיה.
   (ב) הראו שלכל $A\subseteq\mathbb{R}$ מתקיים: $scl\left(A\right)=A$.
   (ג) מצאו $A\subseteq\mathbb{R}$ עבורה $cl\left(A\right)\neq A$.
   (ד) האם המרחב מטריזבילי?

6. יהי X מרחב טופולוגי. תהיינה $U \subseteq X$ קבוצה פתוחה ו־$A \subseteq X$ קבוצה **צפופה**, כלומר $cl\left(A\right) = X$.

(א) הוכיחו: $U \subseteq cl\left(A \cap U\right)$.

(ב) הוכיחו: $cl\left(U\right) = cl\left(A \cap U\right)$.

7. נתבונן בשלושת תתי־המרחבים הבאים של $\mathbb{R}^2$:

$$X = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\right\}$$

$$Y = X \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \left(x-2\right)^2 + y^2 = 1\right\}$$

$$Z = X \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = 1\right\}$$

האם X הומיאומורפי ל־Y? האם Y הומיאומורפי ל־Z?

8. הראו שלכל $n > 1$, $\mathbb{R}^n$ לא הומיאומורפי ל־$\mathbb{R}$.

9. יהיו X, Y מרחבים טופולוגיים, תהי $A \subseteq X$ ויהי $f : X \to Y$ הומיאומורפיזם. הוכיחו שמתקיים:

$$int\left(f\left(A\right)\right) = f\left(int\left(A\right)\right)$$