פתרונות לתרגיל 2

תאריך הגשה: 05.11.2020

- ענו על כל השאלות בכתב ברור וקריא עד כמה שאפשר.
- לפני ההגשה כתבו על התרגיל שם מלא ות.ז.
- נא להגיש בקובץ PDF אחד!

שאלה 1. תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה כך ש- $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = L$ ו-$\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = L$ הוכיחו ש-$\lim_{n\to\infty} a_n = L$

פתרון.
יהי $\varepsilon > 0$, אז מהנתון הראשון נקבל שקיים N_1 כך שלכל $n \in N$ מתקיים

$$|a_{2n} - L| < \epsilon$$

ומהנתון השני נקבל שקיים N_2 כך שלכל $n \in N$ מתקיים

$$|a_{2n+1} - L| < \epsilon$$

אם ניקח $N = \max\{N_1, N_2\}$ נקבל ששתי הביטויים מתקיימים לכן ניתן לומר שלכל $n > N$ מתקיים

$$|a_n - L| < \epsilon$$

משמע $\lim_{n\to\infty} a_n = L$

שאלה 2. יהי $k \in \mathbb{N}$ מספר טבעי כלשהו, נגדיר

$$a_n = \frac{\sum_{i=0}^{k-1} n^i}{\sum_{i=0}^{k} n^i}$$

(כלומר עבור $k = 3$ נקבל את הסדרה $a_n = \frac{n^2+n+1}{n^3+n^2+n+1}$) הוכיחו לפי הגדרת הגבול שלכל k מתקיים $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

פתרון.
יהי $\varepsilon > 0$, אז צריך למצוא $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $|a_n - 0| < \epsilon$נתבונן באגף שמאל

$$|a_n - 0| = \left|\frac{\sum_{i=0}^{k-1} n^i}{\sum_{i=0}^{k} n^i}\right| < \left|\frac{\sum_{i=0}^{k-1} n^i}{\sum_{i=1}^{k} n^i}\right| = \left|\frac{\sum_{i=0}^{k-1} n^i}{n\sum_{i=0}^{k-1} n^i}\right| = \frac{1}{n}$$

נראה ש-$\frac{1}{n} < \epsilon$ לכן כלומר לכל n המקיים $n > \frac{1}{\epsilon}$ מתקיים $|a_n - 0| < \epsilon$ לכן נבחר $N = \left\lceil \frac{1}{\epsilon} \right\rceil + 1$

שאלה 3. תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה. הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה:
אם לכל $\epsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ טבעי כך ש-$|a_N| < \epsilon$ אז $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

פתרון.

הפרכה : ניקח את הסדרה ... $0,1,1,1,1,1,1,$ כלומר $a_n = \begin{cases} 0 & n=1 \\ 1 & n \neq 1 \end{cases}$ אז לכל $\epsilon > 0$ קיים $N = 1 \in \mathbb{N}$ כך ש-$|a_N| = 0 < \epsilon$ אך כמובן

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1 \neq 0$$

נסו להוכיח הגבול הוא 1 לפי הגדרת הגבול!