תרגול 6 אינפי 3

15 בינואר 2015

בתרגול הקודם הזכרנו שקשירות אינה גוררת קשירות מסילתית; כלומר, ישנם מרחבים קשירים שאינם קשירים מסילתית.

דוגמה מפורסמת היא "עקומת הסינוס של הטופולוגים" (חפשו בגוגל), הקבוצה:

$$\left\{\left(x, sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) : x > 0\right\} \cup (\{0\} \times [-1,1])$$

כלומר הצד החיובי של גרף הפונקציה $sin\left(\frac{1}{x}\right)$ והחלק בין 1- ו־1 על ציר ה$-y$.

<u>תרגיל:</u>

יהי $A \subseteq X$ תת מרחב קשיר של המרחב X. נסמן ב$-int(A)$ את אוסף הנקודות הפנימיות. האם $int(A)$ הוא מרחב קשיר?

<u>פתרון:</u>

לא בהכרח. נתבונן בשתי הקבוצות הבאות ב$-\mathbb{R}^2$:

$$A = \{(x,y)|x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$B = \{(x,y)|(x-2)^2 + y^2 \leq 1\}$$

אלו עיגולים עם מרכזים בנקודות $(0,0), (2,0)$ שמשיקים בנקודה $(1,0)$. מכיוון שהם קשירים והחיתוך ביניהם אינו ריק, נקבל שגם האיחוד $A \cup B$ קשיר.

אלא מה? $int(A\cup B)$ הוא איחוד של שני עיגולים זרים (ללא השפה). לכן אינו קשיר (בדקו האם $int(A), int(B)$ עושות את העבודה).

הגדרה:

בהינתן $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, נגדיר את הנגזרת החלקית לפי המשתנה x_i בנקודה a כך:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)=\lim_{\Delta x_i\to 0}\frac{f(a_1,a_2...,a_i+\Delta x_i,a_{i+1},...,a_n)-f(a_1,...,a_n)}{\Delta x_i}$$

הגרדיאנט הוא וקטור הנגזרות:

$$\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a),...,\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$$

נסמן: $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)=f_{x_i}(a)$.

באופן כללי, כאשר נגזור j_i פעמים לפי המשתנה ה־i, נסמן:

$$\frac{\partial^{j_1+...+j_n}f}{\partial^{j_1}x_1....\partial^{j_n}x_n}$$

*בעצם, כשאנו גוזרים לפי משתנה מסויים אנו מתייחסים אליו כאל המשתנה היחידי, כאשר כל השאר הם קבועים.

<u>תרגיל:</u>

חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{(x^2+y)^2}{x^4+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

<u>פתרון:</u>

בכל נקודה שאינה $(0,0)$ נגזור כרגיל, כלומר נתייחס אל המשתנה האחר כאל קבוע.

זו נגזרת של מנה, ונקבל:

$$f_x(x,y)=\frac{4xy(y^2-x^4)}{(x^4+y^2)^2}$$

$$f_y(x,y) = \frac{2x^6 - 2x^2y^2}{(x^4+y^2)^2}$$

בנקודה $(0,0)$ נחשב לפי ההגדרה:

$$f_x(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f((t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^4}{t^4} - 1}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1-1}{t} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f((0,t)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^2}{t^2} - 1}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1-1}{t} = 0$$

<u>תרגיל:</u>

חשבו את הנגזרות החלקיות הבאות:

1. f_x, f_y כאשר: $f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

זו נגזרת של מנה, ולכן בכל נקודה שאינה $(0,0)$ נקבל:

$$f_x(x,y) = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f_y(x,y) = \frac{-xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

בנקודה $(0,0)$ הפונקציה אינה מוגדרת (בדקו שהפונקציה אינה רציפה שם).

2. f_{xy} (כלומר לגזור לפי x ואז לפי y) כאשר $f(x,y) = arccos\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)$.

נגזור לפי x ונקבל:

$$f_x(x,y) = ... = -\frac{1}{2\sqrt{xy-x^2}}$$

נגזור זאת לפי y ונקבל:

$$f_{xy}(x,y) = ... = \frac{x}{4(xy-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

הגדרה:

תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ פונקציה. נאמר שהפונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $x^0=(x_1^0,...,x_n^0)$ אם אפשר לכתוב:

$$f(x_1^0+\Delta x_1,...,x_n^0+\Delta x_n)=f(x^0)+\sum_{i=1}^{n}(A_i+\alpha_i(x))\Delta x_i$$

כאשר $A_1,...,A_n$ קבועים ו־$\alpha_1,...,\alpha_n$ הן פונקציות ששואפות ל־0 כאשר Δx שואף ל־0.

כלומר, בסביבת x^0 אפשר להציג את הפונקציה בקירוב טוב כפונקציה ליניארית.

אם פונקציה דיפרנציאבילית בנקודה אז היא רציפה שם, והקבועים A_i הם הנגזרות החלקיות בנקודה:

$$A_k=\frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0)$$

תנאי מספיק לדיפרנציאביליות: הנגזרות החלקיות קיימות ורציפות. תנאי זה לא הכרחי; ניתן דוגמה בהמשך.

איך בודקים האם פונקציה היא דיפרנציאבילית בנקודה מסויימת אם לאו?

נבדוק את הדיפרנציאביליות של הפונקציות הבאות בנקודה $(0,0)$.

1. $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$.

הפונקציה רציפה כהרכבת רציפות.

$f(x,y)$ תהיה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$ מתקיים:

$$f(0+h_1,0+h_2)-f(0,0)=f_x(0,0)h_1+f_y(0,0)+o\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right)$$

החלפנו את Δx_i שבהגדרה ב־h_i. כמו שאמרנו, אם היא אכן דיפ' אז הקבועים הם הנגזרות החלקיות בנקודה. ה־o מסמל את הקירוב.

נחשב את הנגזרות החלקיות בנקודה:

$$f_x(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{t^3}}{t}=1$$

$$f_y(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=1$$

ולכן יש לבדוק אם מתקיים:

$$\sqrt[3]{h_1^3+h_2^3}=h_1+h_2+o\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right)$$

כלומר, האם:

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{\sqrt[3]{h_1^3+h_2^2}-h_1-h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=0$$

כמשמעו של o. אך אם ניקח את המסלול $h_1=h_2=\frac{1}{n}$, נקבל:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{\frac{2}{n^3}}-\frac{2}{n}}{\sqrt{\frac{2}{n^2}}}=\frac{\sqrt[3]{2}-2}{\sqrt{2}}\neq 0$$

ולכן הפונקציה אינה דיפרנציאבילית.

2. הפונקציה:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

נבדוק האם הפונקציה רציפה בנקודה $(0,0)$.

אם נתבונן במסלול $x=y$ נקבל:

$$\lim_{x\to 0}f(x,x)=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{2x^2}=1\neq 0$$

ולכן פונקצייתנו (הפונקציה שלנו חביבי) כלל אינה רציפה בנקודה $(0,0)$ ולכן בוודאי שאינה דיפ'.

3. הפונקציה:

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\frac{1}{x^2+y^2+z^2}e^{-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}} & (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0 & (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$$

נבדוק את רציפות הפונקציה בנקודה $(0,0,0)$:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{1}{x^2+y^2+z^2}e^{-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}=$$

נציב $t=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ונקבל:

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}e^{-\frac{1}{t}}=0=f(0,0,0)$$

ולכן הפונקציה רציפה בנקודה $(0,0,0)$. נחשב את הנגזרות החלקיות בנקודה:

$$f_x(0,0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(t,0,0)-f(0,0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^3}e^{-\frac{1}{\sqrt{t^2}}}=0$$

באופן דומה קל לראות ש-$f_y(0,0,0)=f_z(0,0,0)$.

כעת, על מנת שהפונקציה תהיה דיפרנציאבילית צריך להתקיים:

$$f(h_1,h_2,h_3)-f(0,0,0)=f_x(0,0,0)h_1+f_y(0,0,0)h_2+f_z(0,0,0)h_3+o\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2}\right)$$

כלמור נבדוק האם:

$$\lim_{(h_1,h_2,h_3)\to(0,0,0)}\frac{1}{(h_1^2+h_2^2+h_3^2)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2}}}=0$$

ואכן, אם נציב $t=\sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2}$ נקבל:

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^3}e^{-\frac{1}{t}}=0$$

ולכן הפונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0,0)$.

*דוגמה לכך שרציפות וקיום הגרדיאנט הוא תנאי מספיק אך לא הכרחי לדיפרנציאביליות:

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

לפי מה שלמדנו, ניתן לבדוק שהפונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.

בקצרה, הנגזרות החלקיות בנקודה $(0,0)$ הן 0. לכן, כדי להוכיח דיפ' בנקודה יש להוכיח:

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{(h_1^2+h_2^2)sin\left(\frac{1}{h_1^2+h_2^2}\right)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=0$$

וזה אכן מתקיים.

אלא שהנגזרות בנקודה אינן רציפות; למשל אם נגזור לפי x נקבל במסלול $y=0$

$$f_x(0,0)=-\frac{2}{x}cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

שכלל אינה חסומה כאשר $x\to 0$ ולכן לא רציפה.