

אלגברה לינארית 2 למדעי המחשב 89-113
סמסטר ב' תשע"ד – 2014
מועד ב'.

זמן הבחינה : 3 שעות.
חומר עזר : מחשבון מדעי פשוט בלבד.

שימו לב: שאלה 1 – חובה.
יש לבחור 3 שאלות מתוך שאלות 2-5.

יש לענות באופן במסודר (!) בגוף השאלון בלבד. המחברת היא רק לטייטה! בנוסף, יש להראות כל העבודה הרלוונטי לפתרונות שלכם.

בהצלחה!

שאלה	ניקוד
1	
2	
3	
4	
5	

1. ענה על אחד השאלות הבאות:

- א. יהי (V_F, \langle, \rangle) מרחב מכפלה פנימית, כאשר $F = \mathbb{R}$ או $F = \mathbb{C}$.
- i. (20) הוכח את אי-שוויון המשולש: שלכל $v, w \in V$ מתקיים ש
- $$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad (*)$$
- (ניתן לצטט ולהיעזר באי שוויון קושי שוורץ).
- ii. (5) מתי יש שוויון בין שני הצדדים ב(*): ז"א $\|v + w\| = \|v\| + \|w\|$.

- ב. יהי $(V_{\mathbb{C}}, \langle, \rangle)$ מרחב מכפלה פנימית מעל שדה מספר המרוכבים \mathbb{C} ו $\dim V = n$. תהי $T: V \rightarrow V$ העתקה ליניארית.
- i. (10) בעזרת המכפלה הפנימית הגדר את ההעתקה הצמודה ל T , שמסומן T^* .
- ii. (15) יהי $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס אורתונורמלי של V . נתון ש $A = [T]_{\mathcal{B}}$. מהו $[T^*]_{\mathcal{B}}$? הוכח את תשובתך.

יש לבחור שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות :

$$2. \text{ תהי } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

- א. האם ניתן ללכסן את A ? הסבר.
- ב. מצא מטריצות $P \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ אורתוגונלית ו $\Lambda \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ אלכסונית כך ש $P^T A P = \Lambda$.
- ג. בעזרת תשובתכם לסעיף ב', מצאו $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ סימטרית כך ש $B^2 = A$.

3. יהי V_F מרחב ווקטורי, $\dim V = n$. לכל סעיף נניח ש $T: V \rightarrow V$ העתקה ליניארית.

א. (10) הוכיחו ש: $\ker T \subseteq \ker T^2$ וגם $\text{Im } T^2 \subseteq \text{Im } T$.

ב. (10) הוכיחו ש $\ker T = \ker T^2 \Leftrightarrow \text{Im } T^2 = \text{Im } T$.

ג. (5) הוכיחו שאם $\text{Im } T^2 = \text{Im } T$ אזי מתקיים ש $V = \text{Im } T \oplus \text{Ker } T$.

4. תהי $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$.
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- א. (5) מצא את הפולינום האופייני של A .
- ב. (5) מצא את פולינום המינימלי של A .
- ג. (10) מצא צורת הג'ורדן של A .
- ד. (5) אם קיימת מטריצה Q כך ש $Q^{-1}AQ$ היא מטריצה אלכסונית?

5. (25) הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות :

א. טענה: תהי $A \in F^{n \times n}$ מטריצה. יהי v ווקטור עצמי של A עם ערך עצמי λ . עבור כל פולינום $g(x) \in F[x]$, מתקיים ש:
$$v g(A) = g(\lambda) v$$

ב. טענה: תהי $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ (מטריצה מרוכבת) כך ש $|A| = 1$. אזי קיימת מטריצה אוניטרית $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ כך ש U^*AU היא מטריצה אלכסונית.