תורת גלואה – בוחן שני שליש – פתרון

יש לענות על כל השאלות. ניקוד כל אחת משאלות 1—3 הוא 35 נקודות (אך הציון הכולל לא יעלה על 100).

חומר עזר מותר: חומר פתוח offline (**ללא** חיפוש באינטרנט או יצירת קשר כלשהו במהלך הבוחן).

משך הבוחן: שעה וחצי.

1. כתבו את ההצהרה הבאה בתחילת המבחן וחתמו בצידה:
**"פתרתי בוחן זה ביושר ובהגינות, ללא כל סיוע חיצוני, ובעזרת חומרי העזר המותרים בלבד".**
2. יהי $p\left(x\right)=x^{6}+ax^{3}+b\in Q\left[x\right]$. הוכיחו כי ממד שדה הפיצול של $p\left(x\right)$ הוא לכל היותר $36$.

**פתרון. מעל ההרחבה (שממדה 2 לכל היותר, או שהיא טריוויאלית)** $K=Q\left(\sqrt{a^{2}-4b}\right)$ **מתפרק** $p$ **למכפלה:**

$$\left(x^{3}-α\right)\left(x^{3}-β\right)$$

***(כאשר:*** $α=\frac{-a+\sqrt{a^{2}-4b}}{2}, β=\frac{-a-\sqrt{a^{2}-4b}}{2}$***) שמתפצלת לגורמים לינאריים מעל:***

$$L=K\left(\sqrt[3]{α},\sqrt[3]{β},ρ\_{3}\right)$$

***אך:***

$$\left[L:Q\right]=\left[L:K\left(\sqrt[3]{β},ρ\_{3}\right)\right]\left[K\left(\sqrt[3]{β},ρ\_{3}\right):K\left(ρ\_{3}\right)\right]\left[K\left(ρ\_{3}\right):K\right]\left[K:Q\right]\leq 3⋅3⋅2⋅2=36$$

***מצאנו הרחבה מפצלת מממד לכל היותר 36, וכל הרחבה מפצלת מכילה עותק של שדה פיצול.***

1. יהי $F$ שדה ויהי $p\left(x\right)\in F\left[x\right]$ פולינום מדרגה 7. יהי $L$ שדה המפצל את $p\left(x\right)$ ונניח כי $\left[L:F\right]$ אי-זוגי. יהי $F⊆K⊆L$ תת-שדה ביניים. הוכיחו כי $p\left(x\right)$ אי-פריק מעל $K$ אם ורק אם אין לו שורש ב-$K$.

**פתרון. ברור כי אם ל-**$p$ **יש שורש מעל** $K$ **אז הוא פריק מעליו. בכיוון ההפוך, נניח כי ל-**$p$ **אין שורש מעל** $K$ **ונתבונן בפירוק של** $p$ **לגורמים אי-פריקים מעל** $K$**. נסמן את דרגות הגורמים האי-פריקים הללו** $d\_{1},…,d\_{n}$**. נניח בשלילה כי** $n>1$ **ולכן** $1<d\_{1},…,d\_{n}<7$**. נניח כי הגורם האי-פריק מעל** $K$ **המתאים ל-**$d\_{i}$ **הוא** $q\_{i}$**. אזי** $K\left[x\right]/<q\_{i}>\rightarrow L$ **שיכון (השולח את** $x$ **לאחד משורשי** $q\_{i}$**) אך:**

$$d\_{i}=\left[K\left[x\right]/<q\_{i}>:K\right] \left| \left[L:K\right] \right|\left[L:F\right]$$

**ולכן מן הנתון כל ה-**$d\_{i}$**-ים אי-זוגיים, כלומר** $d\_{i}\in \left\{3,5\right\}$**. אך 7 אינו סכום של מספרים כאלו, בסתירה. לפיכך** $p$ **פריק מעל** $K$ **אם ורק אם יש לו שורש מעל** $K$**.**

1. יהי $f\left(x\right)\in Q\left[x\right]$ פולינום אי-פריק מדרגה 4, בעל בדיוק שני שורשים ממשיים. הוכיחו כי ממד שדה הפיצול של $f$ הוא 8 או 24.

**פתרון. יהי** $K$ **שדה פיצול. כל שורש של** $f$ **הוא מדרגה 4 מעל** $Q$**, ולכן** $4|\left[K:Q\right]$**, ומצד שני** $\left[K:Q\right]\leq 4!=24$**, כלומר האפשרויות הן 4,8,12,24.**

**יהי** $θ$ **שורש ממשי של** $f$**. אילו** $\left[K:Q\right]=4$ **פירושו ש-**$K=Q\left(θ\right)⊂R$**, בסתירה לכך שיש רק שני ש*ורשים ממשיים (הרי פולינום אי-פריק מעל*** $Q$ ***הוא ספרבילי, ולכן מספר השורשים שלו בהרחבה מתאימה הוא כדרגתו).***

***נניח בשלילה כי*** $\left[K:Q\right]=12$***. אזי*** $K$ ***הרחבת גלואה עם חבורת גלואה*** $G\leq S\_{4}$ ***מסדר 12. אך ל-***$S\_{4}$ ***ת"ח יחידה מאינדקס 2 והיא*** $A\_{4}$ ***(כל ת"ח כזו היא נורמלית ומוגדרת כגרעין של הומומורפיזם לא טריוויאלי ל-***$Z\_{2}$***, אך*** $S\_{4}$ ***נוצרת על ידי עגילים מאורך 2 שכולם צמודים זה לזה, ולכן כל הומומורפיזם כזה נקבע על ידי תמונת עגיל כלשהו, ולפיכך יש רק הומומורפיזם לא טריוויאלי אחד ל-***$Z\_{2}$ ***המתאים לסימן התמורה).***

***מצד שני, ההצמדה המרוכבת משרה אוטומורפיזם של*** $K$ ***שפעולתו על השורשים היא כשל עגיל יחיד, שכמובן אינו משתייך ל-***$A\_{4}$***, בסתירה.***

***לפיכך,*** $\left[K:Q\right]\in \left\{8,24\right\}$ ***(ואמנם שני הערכים אפשריים, אך לא נתבקשתם להוכיח זאת).***