הסבר על ז'רדון

גיא בלשר

13 בנובמבר 2014

בכל החלק הזה של הקורס, רצינו להצליח לפרש מה עושה אופרטור לינארי $T: V \to V$. כדי לפרש את T אנו נעזרים במטריצות המייצגות שלו, ומחפשים מטריצה מייצגת מצורה שתיתן לנו מידע על T רב ככל האפשר.

בתחילה, רצינו לבדוק מתי $[T]_B$ היא מטריצת היחידה I, או אולי אפילו סקלרית αI (כי אז ההעתקה ביחס לבסיס B היא פשוט מתיחה / כיווץ). אבל גילינו ש-$[T]_B = \alpha I \Leftrightarrow T = \alpha I$.

ניסינו להחליש את הדרישה, וחיפשנו קריטריונים מתי $[T]_B$ תהיה אלכסונית. גילינו שהקריטריונים הבאים שקולים:

1. קיים בסיס B של V שעבורו $[T]_B = D$ אלכסונית.
2. קיים בסיס B של V המורכב מווקטורים עצמיים של T.
3. $p_T(x)$ מתפרק למכפלת גורמים לינאריים, ולכל ערך עצמי λ הריבוי האלגברי (החזקה של $(x-\lambda)$ בפולינום האופייני) שווה לריבוי הגיאומטרי (המימד של המרחב העצמי של T הקשור ל-λ).

בסך הכל, דרשנו דרישות חזקות על T, שאין שום הבטחה שיתקיימו.

המשכנו הלאה, ורצינו לבדוק מתי $[T]_B$ מטריצה משולשת (עליונה, בה"כ). הוכחנו את משפט השילוש, שלפיו קיים בסיס B כך ש-$[T]_B$ משולשת (עליונה) $\Leftrightarrow$ $p_T(x)$ מתפרק למכפלת גורמים לינאריים.

הצורה האלכסונית של T מספקת מידע רב על T - מהם הערכים העצמיים, מהם הווקטורים העצמיים, מהם הריבויים המתאימים, מהו הפולינום המינימלי וכו'. בשפת מטריצות, שתי מטריצות לכסינות הן דומות $\Leftrightarrow$ המטריצות האלכסוניות שאליהן הן דומות זהות (עד כדי שינוי הסדר על האלכסון).

לעומתה, הצורה המשולשת של T אינה מספקת מידע רב, וייתכן שלמטריצות דומות יש צורות משולשות שונות, למשל $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

נרצה לחפש איזושהי "צורת ביניים", כזו שתספק לנו מידע רב על האופרטור, אך הדרישות שלה יהיו מינימליות ככל האפשר.

כדי למצוא את צורת הביניים הזו ננסה לחזור ללכסון, ולהבין מנקודת מבט אחרת מה בעצם עשינו.
קל לבדוק כי הטענה הבאה מתקיימת:

טענה. האופרטור T ניתן ללכסון $\Leftrightarrow$ $p_T(x)$ מתפרק למכפלת גורמים לינאריים עם שורשים $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, וכן $V = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_m}$.

אנו רוצים למצוא הצגה לא אלכסונית של T, אבל נרצה לחקות את הפירוק הזה למרחבים עצמיים. נבין מה התכונות שלו:

1. לכל $i \neq j$, $V_{\lambda_i} \cap V_{\lambda_j} = \{0\}$.
2. (הכללה של הסעיף הקודם) לכל i, $\left(V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_{i-1}}\right) \cap V_{\lambda_i} = \{0\}$.
3. לכל i, $T\left(V_{\lambda_i}\right) \subseteq V_{\lambda_i}$.

אנחנו רוצים להכליל את הלכסון, ולכן נרצה לבדוק מה קורה אם יש לנו פירוק המקיים את התנאים הנ"ל. בהרצאה הופיעה הלמה הבאה:

למה. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, ויהי $T : V \to V$ אופרטור לינארי. נניח ש־$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$ הינו סכום ישר של תתי־מרחבים אינווריאנטיים תחת T (כלומר, לכל i מתקיים $T(V_i) \subseteq V_i$). יהי B_i בסיס של V_i (לכל i), ונסמן $B = \bigcup_{i=1}^{k} B_i$ (איחוד זר). אזי B בסיס של V, וכן

$$[T]_B = \begin{pmatrix} [T|_{V_1}]_{B_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & [T|_{V_m}]_{B_m} \end{pmatrix}$$

(לא נוכיח פה את הלמה)

הערה: מטריצות מהסוג הזה נקראות מטריצות אלכסוניות־בלוקים; נרחיב עליהן בהמשך.

אם כן, נחפש פירוק של V לסכום ישר של תתי־מרחבים אינווריאנטיים תחת T, שיכליל את הרעיון של ערכים עצמיים.

הווקטור v הוא וקטור עצמי של T הקשור ל־λ אם $(\lambda I - T)\, v = 0$. אם כן, ננסה להכליל את הרעיון הזה, ונגדיר את **המרחב העצמי המוכלל**:

$$K_\lambda = \left\{ v \in V \mid \exists k \in \mathbb{N} : (\lambda I - T)^k v = 0 \right\}$$

במילים אחרות, באיזושהי חזקה של $(\lambda I - T)$, הווקטור v יהפוך להיות וקטור עצמי הקשור ל־λ, ובחזקה שאחריה יתאפס.

בהרצאה ראינו מספר תכונות של המרחבים העצמיים המוכללים:

1. $K_\lambda = \{v \in V \mid (\lambda I - T)^n v = 0\}$ ($n = \dim V$).
2. $K_\lambda \cap K_\mu = \{0\}$ לכל $\lambda \neq \mu$.
3. (הכללה של הסעיף הקודם) לכל $\lambda_1, \ldots, \lambda_i$ שונים, $\left(K_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus K_{\lambda_{i-1}}\right) \cap K_{\lambda_i} = \{0\}$.
4. $\dim K_\lambda$ הינו הריבוי האלגברי של λ.
5. כל K_λ הוא אינווריאנטי תחת T.
6. $T|_{K_\lambda}$ הינו אופרטור בעל ערך עצמי יחיד λ.

איך כל זה עוזר? אם $p_T(x)$ מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים, מקבלים את משפט הפירוק למרחבים עצמיים מוכללים:

$$V = K_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus K_{\lambda_m}$$

נסכם את התוצאות עד עכשיו: לכל אופרטור לינארי $T:V\to V$, כך ש־$p_T(x)$ מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים, מצאנו פירוק של V לסכום ישר של תתי־מרחבים אינווריאנטיים תחת T, כלומר נוכל להשיג בסיס שעבורו המטריצה המייצגת תהיה אלכסונית־בלוקים.

קצת על מטריצות אלכסוניות בלוקים: אם יש לנו מטריצה מהצורה

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k \end{pmatrix}$$

היא נקראת **מטריצה אלכסונית־בלוקים**. את הפולינום האופייני ואת הפולינום המינימלי שלה אפשר לחשב בקלות:

$$\begin{aligned} p_A(x) &= p_{A_1}(x)\cdot\cdots\cdot P_{A_k}(x) \\ m_A(x) &= \operatorname{lcm}\{m_{A_1}(x),\ldots,m_{A_k}(x)\} \end{aligned}$$

אולי הגיע הזמן, בעמוד השלישי, להזכיר את בלוקי ז'ורדן. **בלוק (תא) ז'ורדן** הוא המטריצה

$$J_n(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

עבור המטריצה הזו, הפולינום האופייני והפולינום המינימלי הם $(x-\lambda)^n$, ולכן הריבוי האלגברי המתאים ל־λ הוא n. הריבוי הגיאומטרי המתאים ל־λ הוא 1, וכן $J_n(\lambda)\sim J_n(\mu)\Leftrightarrow\lambda=\mu$.

מה שניסיתי להראות כרגע הוא שאנחנו יודעים מידע רב על בלוק ז'ורדן.

אז אולי כדאי לדרוש $[T]_B=J_n(\lambda)$? לא תמיד אפשר להגיע לצורה הזו; למשל, אם ל־T יש שני ערכים עצמיים שונים (גם אם יש ערך עצמי יחיד אין הבטחה שנוכל להגיע לצורה זו).

נחזור למה שהתחלנו. נסתכל על אופרטור לינארי $T:V\to V$ עם ערך עצמי λ; אזי ל־$T|_{K_\lambda}$ יש ערך עצמי יחיד, והוא λ. אם כן, לאופרטור $\lambda I-T:K_\lambda\to K_\lambda$ יש ערך עצמי יחיד 0, כלומר הוא נילפוטנטי (ז"א $T^r=0$ עבור r כלשהו). אם כן, נרצה להסתכל על אופרטורים נילפוטנטיים.

נניח ש־$T:V\to V$ נילפוטנטי. אזי הערך העצמי היחיד שלו הוא 0. אם כן, הוא יכול להיות דומה לבלוק ז'ורדן עם 0 על האלכסון. ניזכר בלמה מההרצאה:

<u>למה.</u> $[T]_B=J_n(0)\Leftrightarrow$ הבסיס B הינו $B=\left\{T^{n-1}(v),\ldots,T(v),v\right\}$, כאשר מתקיים $T^{n-1}(v)\neq 0$ אבל $T^n(v)=0$ (זהו **מסלול**).

אם נצליח למצוא בסיס של V המורכב מאיחוד זר של מסלולים, לפי הלמה שהוזכרה בעמוד הקודם, נקבל

$$[T]_B=\begin{pmatrix} J_{m_1}(0) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{m_k}(0) \end{pmatrix}$$

ולפי משפט ז'ורדן במקרה הנילפוטנטי, <u>יש</u> בסיס כזה ו<u>הוא יחיד</u> (עד כדי שינוי סדר המסלולים).

מהמקרה הנילפוטנטי אפשר להגיע למקרה של ערך עצמי יחיד ולמקרה הכללי. נציג את הרעיון של ההוכחות עבור הקיום בעמודים הבאים.

משפט (משפט ז'ורדן הנילפוטנטי ־ קיום). יהי $T:V\to V$ אופרטור נילפוטנטי. אזי קיים בסיס מז'רדן של T.

הוכחה. הרעיון הוא לבנות בסיס שיהיה איחוד זר של מסלולים. נניח ש־T נילפוטנטי מסדר k, ובמילים אחרות מתקיים $\mathrm{Im}T^{k-1}\subseteq\ker T$; נקבל את שרשרת ההכלה

$$\mathrm{Im}T^{k-1}\subseteq\mathrm{Im}T^{k-1}\cap\ker T\subseteq\cdots\subseteq\mathrm{Im}T\cap\ker T\subseteq\ker T$$

אז מה אנחנו עושים? מתחילים מבסיס של $\mathrm{Im}T^{k-1}$, $B_1=\left\{T^{k-1}\left(v_1\right),\ldots,T^{k-1}\left(v_{r_1}\right)\right\}$, ונשלים אותו למסלולים (כי אנחנו רוצים שהבסיס שלנו יהיה איחוד זר של מסלולים):

$$\tilde{B}_1=\left\{T^{k-1}\left(v_1\right),\ldots,T\left(v_1\right),v_1,\ldots,T^{k-1}\left(v_{r_1}\right),\ldots,T\left(v_{r_1}\right),v_{r_1}\right\}$$

נסמן $U_1=\mathrm{Span}\tilde{B}_1$, ונקבל שהמטריצה המייצגת עד כה היא

$$[T|_{U_1}]_{\tilde{B}_1}=\begin{pmatrix}J_k\left(0\right) & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & J_k\left(0\right)\end{pmatrix}$$

הכל טוב ויפה, אבל לא בהכרח סיימנו, ז"א ש־$\tilde{B}_1$ איננו בהכרח בסיס ל־V.
אז נמשיך ־ מרחיבים את B_1 לבסיס B_2 של $\mathrm{Im}T^{k-2}\cap\ker T$, משלימים אותו למסלולים (מקבלים את $\tilde{B}_2$), ואם מסמנים $U_2=\mathrm{Span}\tilde{B}_2$ מקבלים

$$[T|_{U_2}]_{\tilde{B}_2}=\begin{pmatrix}J_k\left(0\right) & & & & & 0\\ & \ddots & & & & \\ & & J_k\left(0\right) & & & \\ & & & J_{k-1}\left(0\right) & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & J_{k-1}\left(0\right)\end{pmatrix}$$

שוב, ייתכן שעדיין לא סיימנו. בהוכחה עצמה בונים בסיס B של $\ker T$ על ידי הרחבת הבסיסים בשרשרת ההכלה הנ"ל, ואז מוכיחים שזה אכן בסיס.

משפט (משפט ז'ורדן לאופרטור עם ערך עצמי יחיד ־ קיום). יהי $T:V\to V$ אופרטור כך ש־λ הוא ערך עצמי יחיד שלו. אזי יש ל־T הצגה בצורה אלכסונית־בלוקים, כך שכל בלוק הוא $J_m\left(\lambda\right)$.

הוכחה. T הוא עם ערך עצמי יחיד λ, ז"א $p_T\left(x\right)=\left(x-\lambda\right)^n$. נציב את T, ונקבל $\left(T-\lambda I\right)^n=0$, כלומר $T-\lambda I:V\to V$ נילפוטנטי. לפי משפט ז'ורדן הנילפוטנטי, קיים בסיס B של V שעבורו

$$\begin{aligned}[T]_B-\lambda I &= [T-\lambda I]_B=\begin{pmatrix}J_{m_1}\left(0\right) & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & J_{m_k}\left(0\right)\end{pmatrix}\\ \Longrightarrow [T]_B &= \lambda I+\begin{pmatrix}J_{m_1}\left(0\right) & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & J_{m_k}\left(0\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}J_{m_1}\left(\lambda\right) & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & J_{m_k}\left(\lambda\right)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

משפט (משפט ז'ורדן הכללי ־ קיום). יהי $T:V\to V$ אופרטור לינארי, כך ש־$p_T\left(x\right)$ מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים. אזי קיים ל־T בסיס מז'רדן.

הוכחה. משתמשים בפירוק למרחבים עצמיים מוכללים. אם נצמצם את T למרחב עצמי מוכלל K_{λ_i}, לצמצום יהיה ערך עצמי יחיד, ולכן יהיה לו בסיס מז'רדן B_i. איחוד הבסיסים האלו ייתן את הבסיס המז'רדן.

כעת נציין את האלגוריתם לז'רדון אופרטור ונסביר אותו.

<u>אלגוריתם לז'רדון.</u> יהי $T:V\to V$ אופרטור לינארי, כך ש־$p_T(x)$ מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים.

1. בוחרים בסיס כלשהו S של V, ומוצאים את המטריצה המייצגת $A=[T]_S$.
2. נמצא את הפולינום המינימלי של המטריצה A. נסמן את הערכים העצמיים השונים $\lambda_1,\dots,\lambda_s$.
3. לכל ערך עצמי λ מוצאים בסיס למרחב העצמי המוכלל K_λ באופן הבא:
   (א) נסמן ב־k את החזקה של $(x-\lambda)$ בפולינום המינימלי.
   (ב) מוצאים בסיס של $V_\lambda\cap \mathrm{C}\left((\lambda I-A)^{k-1}\right)$ באופן הבא:
      i. מסתכלים על המטריצה $(\lambda I-A)^{k-1}$, ובוחרים עמודות $C_{i_1},\dots,C_{i_p}$ הפורשות את מרחב העמודות של המטריצה.
      ii. פותרים את המערכת $x_1(\lambda I-A)C_{i_1}+\cdots+x_p(\lambda I-A)C_{i_p}=0$. מוצאים בסיס למרחב הפתרונות.
      iii. לכל וקטור $x=(x_1,\dots,x_n)$ בבסיס מרחב הפתרונות מגדירים $u_x=x_1e_{i_1}+\cdots+x_pe_{i_p}$.
      iv. לכל וקטור x במרחב הפתרונות מוסיפים לבסיס המז'רדן את המסלול (בסדר משמאל לימין)

$$(\lambda I-A)^{k-1}u_x,\dots,(\lambda I-A)u_x,u_x$$

   (ג) באופן דומה מוצאים בסיס של $V_\lambda\cap \mathrm{C}\left((\lambda I-A)^{k-2}\right)$, ונוסיף ממנו מסלולים לבסיס המז'רדן <u>כל עוד אין תלות לינארית</u>.
   (ד) ממשיכים בתהליך עבור $V_\lambda\cap \mathrm{C}\left((\lambda I-A)^{k-3}\right)$, ..., V_λ, עד שמספר הווקטורים בבסיס המז'רדן שנוצרו מ־λ הוא הריבוי האלגברי של λ.
4. מאחדים את הבסיסים המז'רדנים מהשלב הקודם לבסיס מז'רדן אחד גדול B. זהו הבסיס המז'רדן.

נבהיר את הרעיון העומד מאחורי האלגוריתם. כפי שהסברנו בהוכחות, צריך למצוא בסיס מז'רדן לכל K_λ; אז, איחודם יהיה בסיס מז'רדן.

אמרנו ש־$T|_{K_\lambda}$ הוא אופרטור עם ערך עצמי יחיד λ, ולכן $\lambda I-T:K_\lambda\to K_\lambda$ נילפוטנטי. מפעילים עליו את רעיון ההוכחה של המקרה הנילפוטנטי, רק שמתייחסים למטריצה המייצגת שלו.

עבור המטריצה המייצגת, ההכלה הנ"ל היא בעצם

$$\mathrm{C}\left((\lambda I-A)^{k-1}\right)\subseteq \mathrm{C}\left((\lambda I-A)^{k-2}\right)\cap V_\lambda\subseteq\cdots\subseteq \mathrm{C}(\lambda I-A)\cap V_\lambda\subseteq V_\lambda$$

ואז אמרנו שצריך למצוא בסיס ל־$\mathrm{C}\left((\lambda I-A)^{k-1}\right)$, להשלים מסלולים, להרחיבו לבסיס ל־$\cap\,\mathrm{C}\left((\lambda I-A)^{k-2}\right)$ V_λ, להשלים מסלולים, וכן הלאה, עד שמגיעים לבסיס של K_λ.

<u>הכללים בז'רדון אופרטור.</u> אם $T:V\to V$ אופרטור לינארי כך ש־$p_T(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים, יש כללים הקובעים מהי צורת הז'ורדן מבלי לחשב את הבסיס המז'רדן: לכל ערך עצמי λ,

1. סכום סדרי (גדלי) הבלוקים המתאימים ל־λ הינו הריבוי האלגברי של λ.
2. מספר הבלוקים המתאימים ל־λ הינו הריבוי הגיאומטרי של λ.
3. גודל הבלוק המקסימלי המתאים ל־λ הינו החזקה של $(x-\lambda)$ בפולינום המינימלי.