חשבון אינפיניטסימלי 2 מדמ"ח — 89-133

פתרון מועד ב' תשע"ט

חלק א'— נכון/לא נכון : הקיפו את התשובה הנכונה (4 נקודות כל אחת)

1. אם f אינטגרבילית וזוגית, אזי $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.
נכון. הרי לפי הצבה $u = -x$ (הגוררת $du = -dx$), נקבל

$$\int_{x=-a}^{x=0} f(x)dx = -\int_{u=a}^{u=0} f(-u)du = \int_{u=0}^{u=a} f(-u)du = \int_{u=0}^{u=a} f(u)du$$

כאשר השוויון האחרון נובע מזוגיות של f. לכן בסה"כ

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_0^a fxdx$$

2. אם f אינטגרבילית על $[0,1]$, אזי לכל סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [0,1]$ מתקיים

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) = \int_0^1 f(x)dx$$

לא נכון. כדי שהממוצע $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n)$ יהיה סכום רימן, כל x_n חייב להיות בתת-קטע אחר בגודל $\frac{1}{N}$. להפרכה קונקרטית ניקח

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

קל לראות כי f אינטגרבילית וכי $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$, אבל אם ניקח סדרה $\{x_n\}$ שמוכלת כולה בחלק השמאלי $[0,\frac{1}{2}]$, נקבל 0 באגף שמאל.

3. אם $\int_0^\infty f(x)dx$ מתכנס, אזי f חסומה על $(0,\infty)$.
לא נכון. לדוגמא אם ניקח

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}$$

אפשר לראות כי אינה חסומה בסביבה של $x = 0$, אך $\int_0^1 f(x)dx$ מתכנס בהשוואה לאינטגרל הידוע $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$, והאינטגרל $\int_1^\infty f(x)dx$ מתכנס ממבחן דירישלה.

4. אם f גזירה ברציפות, אז אורך הגרף $y = f(x)$ בין הנקודה $(a, f(a))$ לנקודה $(b, f(b))$ גדול או שווה ל־$(b-a)$.
נכון. מהנוסחא של אורך הגרף ניתן לראות

$$\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}dx \geq \int_a^b \sqrt{1}dx = \int_a^b dx = (b-a)$$

אפשר גם להסיק את זה מטיעון גיאומטרי, $|b-a|$ הוא אורך קו ישר המחבר בין $(a, f(a))$ לבין $(b, f(a))$ כאשר f פונקציה קבועה, וכל גרף של פונקציה אחרת תגדיל את אורך העקומה.

5. אפשר לגזור את הטור $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{x}{n^2}\right)$ איבר־איבר.
נכון. טור הנגזרות הוא

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\left(\frac{x}{n^2}\right)^2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

מכיוון שהביטוי $\left(\frac{x}{n^2}\right)^2 \geq 0$ הוא אי־שלילי לכל x, נקבל עבור כל $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{1+\left(\frac{x}{n^2}\right)^2} \cdot \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

ולכן כיוון שהטור הידוע $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מתכנס, טור הנגזרות מתכנס במ"ש על כל $\mathbb{R}$ לפי מבחן ה־M. לכן הטור המקורי גזיר איבר־איבר בכל $\mathbb{R}$.

6. רדיוס ההתכנסות של טור החזקות $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n)x^n$ הוא 1.
נכון. נשים לב קודם כל כי המקדמים $|\sin(n)| \leq 1$ חסומים, ולכן נובע גם

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\sin(n)|} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = 1$$

ולכן לפי נוסחת קושי־הדמאר, רדיוס ההתכנסות הוא לפחות 1. מאידך רואים שבהצבת $x = 1$ נקבל טור מתבדר $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n)$ שבו איבר הכללי לא שואף ל־0, ולכן רדיוס ההתכנסות הוא לכל היותר 1.

7. אם $f(x) = x\ln(1+x^2)$, אז $f^{(5779)}(0) = 0$.
לא נכון. לפי הטור הידוע $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$, נסיק

$$x\ln(1+x^2) = \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{n}$$

מכיוון שלפי נוסחת טיילור $f^{(n)}(0)$ מתאפסת אם ורק אם המקדם של x^n מתאפס בטור טיילור, נסיק שמתקיים $f^{(n)}(0) = 0$ אם ורק אם n זוגי.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} = \frac{7}{8}$

לא נכון. מהטור ההנדסי הידוע, נעשה אינטגרציה איבר־איבר ונקבל שעבור כל $|x| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\ln(1-x)$$

ולכן הצבת $x = \frac{1}{2}$ נותן

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = -\ln(\frac{1}{2}) = \ln(2) \neq \frac{7}{8}$$

9. תהי $f(x, y)$ פונקציה של שני משתנים. אם $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ רציפות בנקודה (x_0, y_0), אזי הנגזרת הכיוונית בנקודה (x_0, y_0) בכיוון המקביל לווקטור (v_1, v_2) היא:

$$\nabla f(x_0, y_0) \bullet \frac{(v_1, v_2)}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

נכון. אם נגזרות חלקיות רציפות, אז הפונקציה דיפרנציאבילית. אם היא דיפרנציאבילית, אז זו הנוסחא לנגזרת כיוונית.

10. תהי $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה גזירה ברציפות, ונסמן $F' = f$. נסמן ב־D את העיגול שמרכזו בראשית ורדיוסו R. אזי

$$\iint_D f(x^2 + y^2) dxdy = \pi(F(R^2) - F(0))$$

נכון. אם עוברים לקואורדינטות קוטביות נקבל את האינטגרל

$$\begin{aligned}\iint_D f(x^2 + y^2) dxdy &= \iint_D f(r^2) r dr d\theta \\ &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R} f(r^2) r dr d\theta\end{aligned}$$

נעשה הצבה $u = r^2$ (ואז $du = 2rdr$) באינטגרל הפנימי ונקבל

$$\begin{aligned}
\iint_D f(x^2+y^2)dxdy &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{1}{2} \int_{u=0}^{R^2} f(u)dud\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{\theta=0}^{2\pi} [F(u)|_{u=0}^{u=R^2}]d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{\theta=0}^{2\pi} [F(R^2)-F(0)]d\theta \\
&= \frac{1}{2}[F(R^2)-F(0)] \cdot \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \\
&= \frac{1}{2} \cdot [F(R^2)-F(0)] \cdot 2\pi
\end{aligned}$$

חלק ב'— כל שאלה 14 נקודות

1. חשבו את האינטגרלים הלא־מסויימים הבאים:

(א) (5 נקודות)

$$\int e^x \sin(x)dx$$

פתרון: נבצע אינטגרציה לפי חלקים פעמיים

$$\begin{aligned}\int e^x \sin(x)dx &= e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)dx \\ &= e^x \sin(x) - \left(e^x \cos(x) - \int e^x(-\sin(x))dx\right) \\ &= e^x \sin(x) - e^x \cos(x) - \int e^x \sin(x)dx\end{aligned}$$

נעביר אגפים

$$2\int e^x \sin(x)dx = e^x \sin(x) - e^x \cos(x) + C$$

ונקבל בסוף

$$\int e^x \sin(x)dx = \frac{1}{2}e^x\left(\sin(x) - \cos(x)\right) + C$$

(ב) (5 נקודות)

$$\int e^{2x} \sin(e^x)dx$$

פתרון: ראשית נבצע הצבה $u = e^x$, $du = e^x dx$ כדי להפטר מהפונקציה המורכבת:

$$\begin{aligned}\int e^{2x} \sin(e^x)dx &= \int e^x \sin(e^x) \cdot e^x dx \\ &= \int u \sin(u)du\end{aligned}$$

את האינטגרל השני אפשר לפתור ע"י אינטגרציה לפי חלקים:

$$\begin{aligned}\int e^{2x} \sin(e^x)dx = \int u \sin(u)du \\ =& u(-\cos(u)) - \int 1 \cdot (-\cos(u)du \\ =& -u\cos(u) + \int \cos(u)du \\ =& -u\cos(u) + \sin(u) + C \\ =& -e^x \cos(e^x) + \sin(e^x) + C\end{aligned}$$

(ג) (4 נקודות)

$$\int \frac{1}{e^x+1}dx$$

פתרון: כמו בסעיף ב', נתחיל בהצבה $u = e^x$, $du = e^x dx$ כדי לקבל

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{e^x+1}dx &= \int \frac{1}{e^x+1}\frac{1}{e^x}\cdot e^x dx \\ &= \int \frac{1}{u+1}\frac{1}{u}du\end{aligned}$$

את האינטגרל השני נפתור בשברים חלקיים:

$$\begin{aligned}\frac{1}{u+1}\frac{1}{u} &= \frac{A}{u+1}+\frac{B}{u} \\ &= \frac{Au+B(u+1)}{(u+1)u} \\ &= \frac{(A+B)u+B}{(u+1)u}\end{aligned}$$

שהפתרון שלו הוא $A=-1, B=1$. לכן

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{e^x+1}dx &= \int \frac{-1}{u+1}du + \int \frac{1}{u}du \\ &= -\ln(u+1)+\ln(u)+C \\ &= -\ln(e^x+1)+x+C\end{aligned}$$

2. האם האינטגרל

$$\int_0^{\infty}(-1)^{\lfloor x^2\rfloor}dx$$

מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי, או מתבדר?
(הסימון $\lfloor y\rfloor$ מסמן את המספר השלם הגדול ביותר הקטן מ־y)
פתרון: ראשית, נשים לב כי לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $|(-1)^{\lfloor x^2\rfloor}|=1$, ולכן

$$\int_0^{\infty}|(-1)^{\lfloor x^2\rfloor}|dx=\int_0^{\infty}1dx=\infty$$

והאינטגרל אינו מתכנס בהחלט. נותר לקבוע אם הוא מתכנס בתנאי או מתבדר. נשים לב כי הפונקציה חסומה בכל $\mathbb{R}$, וגם רציפה פרט ל־x שהוא שורש מספר שלם (כלומר $x^2\in\mathbb{Z}$), וזו קבוצה בת־מניה ולכן בעלת מידה 0, ולכן הפונקציה אינטגרבילית רימן על כל קטע $[0,R]$, וצריך לבדוק התכנסות רק ב־∞.
<u>פתרון א׳–הצבה ומבחן דירישלה:</u> אם נציב $u=x^2$, הגורר $dx=\frac{1}{2\sqrt{u}}du$, נקבל

$$\int_{x=0}^{x=\infty}(-1)^{\lfloor x^2\rfloor}dx=\int_{u=0}^{u=\infty}(-1)^{\lfloor u\rfloor}\frac{1}{2\sqrt{u}}du$$

קל לראות כי

$$-1\leq\int_0^R(-1)^{\lfloor u\rfloor}du\leq 1$$

מכיוון שהפונקציה $(-1)^{\lfloor u\rfloor}$ מחליפה סימן כל מספר שלם, ונותן פונקציה מחזורית אשר אינטגרלה מתאפסת על כל מחזור שלם. ברור כי הפונקציה $\frac{1}{2\sqrt{u}}$מונוטונית יורדת ל־0 וגזירה ברציפות. לכן תנאי מבחן דירישלה מתקיימים והאינטגרל מתכנס. מכיוון שכבר הראינו שאינו מתכנס בהחלט, האינטגרל **מתכנס בתנאי**.
<u>פתרון ב׳–טור לייבניץ:</u> כיוון דומה אך מעט שונה, הוא לחלק את התחום לתתי־קטעים $[\sqrt{n},\sqrt{n+1}]$ ולשים לב כי

$$\int_0^{\sqrt{N}}(-1)^{\lfloor x^2\rfloor}dx=\sum_{n=1}^{N}\int_{\sqrt{n-1}}^{\sqrt{n}}(-1)^{\lfloor x^2\rfloor}dx=\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$$

מכיוון שעל כל תת־קטע כזה הפונקציה שווה זהותית ל1 או -1בהתאם לזוגיות של n.
אפשר לראות שההפרש $\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$ חיובי ושואף מונוטונית ל־0, ולכן הטור הנ״ל באגף ימין מתכנס לפי מבחן לייבניץ, נגיד

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})=L$$

עכשיו ניקח $R\in\mathbb{R}$ מספיק גדול, ונקבל

$$\int_0^R(-1)^{\lfloor x^2\rfloor}dx=\int_0^{\sqrt{\lfloor R^2\rfloor}}(-1)^{\lfloor x^2\rfloor}dx+\int_{\sqrt{\lfloor R^2\rfloor}}^{R}(-1)^{\lfloor x^2\rfloor}dx$$

כאמור האינטגרל הראשון באגף ימין מתכנס ל־L כאשר $R \to \infty$, והאינטגרל הימני שואף ל־0 כי

$$\left|\int_{\sqrt{\lfloor R^2 \rfloor}}^{R} (-1)^{\lfloor x^2 \rfloor} dx\right| \leq \int_{\sqrt{\lfloor R^2 \rfloor}}^{R} \left|(-1)^{\lfloor x^2 \rfloor}\right| dx = \int_{\sqrt{\lfloor R^2 \rfloor}}^{R} dx = R - \sqrt{\lfloor R^2 \rfloor} \to 0$$

ולבסוף

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} (-1)^{\lfloor x^2 \rfloor} dx &= \lim_{R \to \infty} \int_0^{R} (-1)^{\lfloor x^2 \rfloor} dx \\
&= \lim_{R \to \infty} \int_0^{\sqrt{\lfloor R^2 \rfloor}} (-1)^{\lfloor x^2 \rfloor} dx + \lim_{R \to \infty} \int_{\sqrt{\lfloor R^2 \rfloor}}^{R} (-1)^{\lfloor x^2 \rfloor} dx \\
&= L + 0 = L
\end{aligned}$$

והאינטגרל מתכנס. היות וכבר הראינו שאינו מתכנס בהחלט, האינטגרל **מתכנס בתנאי**.

3. לכל $n \in \mathbb{N}$, נגדיר $f_n(x) = n\cos^n(x)\sin(x)$.

(א) (5 נקודות) חשבו את $\int_0^{\pi/2} f_n(x)dx$.

פתרון: הצבה $u = \cos(x)$, $du = -\sin(x)dx$. נקבל

$$\begin{aligned}\int_{x=0}^{x=\pi/2} n\cos^n(x)\sin(x)dx &= -n\int_{u=1}^{u=0} u^n du \\ &= n\int_{u=0}^{u=1} u^n du \\ &= \frac{n}{n+1}\end{aligned}$$

(ב) (9 נקודות) האם סדרת הפונקציות $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במידה שווה בקטע $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$?

פתרון: קודם כל נשים לב כי הסדרה מתכנסת נקודתית ל־0 בתחום הזה כי

$$\lim_{n\to\infty} f_n(0) = \lim_{n\to\infty} n\cdot\cos^n(0)\cdot\sin(0) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

ולכל $0 < x \leq \pi/2$ מתקיים $|\cos(x)| < 1$ כאשר $\sin(x)$ חסומה, ולכן $\lim_{n\to\infty} n\cos^n(x)\sin(x)$ מתאפס כמו כל סדרה מהצורה $\lim_{n\to\infty} na^n$ עבור $|a| < 1$, לפי סדרי גודל או לופיטל. כעת נותר להכריע אם ההתכנסות ל־0 היא במידה שווה או לא.

<u>פתרון א'– משפט אינטגרציה איבר־איבר:</u> הדרך הפשוטה ביותר להפריך התכנסות במ"ש היא לשים לב כי פונקציית הגבול f מתאפסת זהותית, ולכן בהשוואה לסעיף א'

$$\int_0^{\pi/2} f(x)dx = 0$$
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2} f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$$

ולמדנו שאם סדרה מתכנסת במידה שווה, אזי אינטגרל הגבול שווה לגבול האינטגרלים (אינטגרציה איבר־איבר), מה שלא מתקיים פה. לכן אין התכנסות במידה שווה.

<u>פתרון ב'–חישוב הסופרימום במפורש:</u> נחשב את הביטוי

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{0\leq x\leq\pi/2}|f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty}\sup_{0\leq x\leq\pi/2} n\cos^n(x)\sin(x)$$

ונראה שאינו שואף ל־0 . מסיבות טכניות, עדיף להציב $t = \sin(x)$, ולחשב את הסופרימום בריבוע, כלומר הביטוי

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{0\leq t\leq 1} n^2(1-t^2)^n t^2 = \lim_{n\to\infty} n^2\sup_{0\leq t\leq 1}(1-t^2)^n t^2$$

כדי למצוא את נקודת הסופרימום נשים לב כי הביטוי חיובי ומתאפס בשתי הקצוות $t = 0, 1$, ולכן הסופרימום חייב להתקבל כמקסימום מקומי בפנים הקטע, והנגזרת חייבת להתאפס שם. נחשב:

$$\begin{aligned}
0 &= [(1-t^2)^n t^2]' = n(1-t^2)^{n-1} \cdot (-2t) \cdot t^2 + (1-t^2)^n \cdot 2t \\
&= -2nt^3(1-t^2)^{n-1} + 2t(1-t^2)^n \\
0 &= -nt^2 + (1-t^2) = 1-(n+1)t^2 \\
t^2 &= \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

אם נציב חזרה בסופרימום נקבל

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sup_{0\le t\le 1} n^2(1-t^2)^n t^2 &= \lim_{n\to\infty} n^2 \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n+1} \\
&= \frac{1}{e} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n+1} = \infty \neq 0
\end{aligned}$$

ולכן אין התכנסות במ"ש.

4. מצאו מקסימום ומינימום מוחלטים של הפונקציה

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

בתחום

$$x^4 + y^4 \leq 1$$

פתרון: ראשית נחפש נקודות קיצון מקומיות בפנים התחום. הגרדיאנט של f הוא

$$\nabla f(x,y) = (2x, 2y)$$

והוא מתאפס בנקודה אחת $(0,0)$. נשים לב כי נקודה זו היא מינימום מקומי (או לפי העובדה ש־f אי־שלילית ומתקיים $f(0,0) = 0$, או לפי מבחן המיון עם ההסיאן).
כעת נחפש נקודות מקסימום/מינימום יחסי תחת האילוץ $g(x,y) = x^4 + y^4 = 1$. הפונקציה g גזירה והגרדיאנט

$$\nabla g(x,y) = (4x^3, 4y^3)$$

לא מתאפס לאורך עקומת האילוץ, ולכן צריך רק את פתרונות מערכת כופלי לגראנז':

$$\begin{aligned} 2x &= \lambda(4x^3) \\ 2y &= \lambda(4y^3) \\ x^4 + y^4 &= 1 \end{aligned}$$

אפשר לראות שקיים פתרון $x = 0$ למשוואה הראשונה, שמוביל לשתי נקודות אפשריות $(0, \pm 1)$. כנ"ל פתרון $y = 0$ למשוואה שניה מובילה לפתרונות $(\pm 1, 0)$. כדי לחפש פתרונות נוספים ניתן להניח $x, y \neq 0$.
אם נחלק משוואה ראשונה בשניה, נקבל

$$\frac{x}{y} = \frac{x^3}{y^3}$$

ומכיוון $x, y \neq 0$ נכפיל בשני האגפים ב־$\frac{y^3}{x}$ כדי לקבל

$$y^2 = x^2$$

(ניתן להגיע לזה גם בהצבת λ ממשוואה אחת בשניה.) מהצבת משוואה זו במשוואה השלישית נובע

$$x^4 = \frac{1}{2} = y^4$$

המוביל ל־4 נקודות נוספות $(\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}})$. אלא כל הפתרונות למערכת כופלי לגראנז, וכעת ניתן לחשב ולהשוות

$$\begin{aligned} f(0,0) &= 0 \\ f(0,\pm 1) &= 1 \\ f(\pm 1, 0) &= 1 \\ f\left(\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

ולכן התשובה הסופית היא: מקסימום מוחלט $f\left(\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right) = \sqrt{2}$, ומינימום מוחלט $f(0,0) = 0$.

5. חשבו את האינטגרל הכפול

$$\iint_D (x^2-y^2)dxdy$$

כאשר D הוא המעויין שקודקודיו הם $(0,-1)$, $(-1,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$.

פתרון: יש כמה דרכים לחשב את האינטגרל, אני אביא חישוב אפשרי אחד. בגלל הסימטריה של הפונקציה והתחום ביחס לסימן של x, נחשב את החלק מימין לציר ה־y (איפה ש־x חיובי) ונכפול בשתיים. אז החלק שלנו, נקרא לו D', הוא משולש שקודקודיו הם $(0,1)$, $(0,-1)$, $(1,0)$. חישוב פשוט מראה שהוא מוגבל ע״י ציר y משמאל, הישר $y=1-x$ מלמעלה, והישר $y=x-1$ מלמטה. לכן סה״כ נקבל

$$\begin{aligned}\iint_D (x^2-y^2)dxdy &= 2\iint_{D'}(x^2-y^2)dxdy\\ &= 2\int_{x=0}^{x=1}\int_{y=x-1}^{y=1-x}(x^2-y^2)dydx\\ &= 2\int_{x=0}^{x=1}\left(x^2y-\frac{1}{3}y^3\Big|_{y=x-1}^{y=1-x}\right)dx\\ &= 2\int_{x=0}^{x=1}\left[2x^2(1-x)-\frac{2}{3}(1-x)^3\right]dx\\ &= 4\int_0^1(x^2-x^3)dx-\frac{4}{3}\int_0^1(1-x)^3dx\\ &= 4(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})-\frac{4}{3}\cdot(\frac{1}{4})\\ &= \frac{1}{3}-\frac{1}{3}=0\end{aligned}$$

אפשר היה גם לטעון דרך סימטריה– לדוגמא, שהתחום D לא משתנה תחת חילוף בין x ל־y, ולכן

$$\iint_D x^2dxdy=\iint_D y^2dxdy$$

וממילא

$$\iint_D (x^2-y^2)dxdy=\iint_D x^2dxdy-\iint_D y^2dxdy=0$$

או לראות כי הפונקציה $f(x,y)=x^2-y^2=(x+y)(x-y)$ היא אי־זוגית ביחס למשתנה $u=x-y$ או $v=x+y$, והתחום סימטרי ביחס לישר $x-y=0$ (או הישר $x+y=0$).

.