תוספת לתרגיל 1 – כמתים

9 בנובמבר 2019

1. יהי $P(x,y)$ פרדיקט, כאשר תחום המשתנים x,y הוא $\mathbb{R}$. הוכיחו או הפריכו:
   (א) $\forall x\exists yP(x,y)\equiv\exists y\forall xP(x,y)$.
   (ב) $\forall x\exists yP(x,y)\equiv\forall y\exists xP(x,y)$.

2. הצרינו את הפסוק הבא, ורשמו את השלילה שלו ללא שימוש מפורש בקשר השלילה:
   "לכל ε חיובי קיים N טבעי כך שלכל $n>N$ מתקיים: $|a_n-L|<\varepsilon$".

פתרון

1. בשני המקרים מדובר על הפרכה.

(א) נתבונן בפרדיקט: $P(x,y)\ :\ x<y$. הפסוק $\forall x\exists yP(x,y)$ אומר: "לכל x קיים y כך ש: $x<y$", כלומר לכל מספר ממשי קיים מספר שגדול ממנו; זהו פסוק אמת.
לעומתו, הפסוק $\exists y\forall xP(x,y)$ אומר: "קיים y כך שלכל x, $x<y$", כלומר קיים מספר ממשי שגדול מכל המספרים, וזה פסוק שקר.

(ב) נתבונן בפרדיקט $P(x,y)\ :\ x=y^2$. הפסוק $\forall x\exists yP(x,y)$ אומר שלכל מספר ממשי x קיים y עבורו $x=y^2$, וזה לא נכון – למשל עבור $x=-1$ לא קיים y כזה.
לעומתו, הפסוק $\forall y\exists xP(x,y)$ אומר שלכל מספר ממשי y קיים x עבורו $x=y^2$, וזה נכון - כל מספר ממשי אפשר להעלות בריבוע ולקבל מספר ממשי.

בדקו את סעיף א' עם הפרדיקט שאיתו הפרכנו את סעיף ב' ולהיפך. האם מקבלים הפרכה?

2. ראשית, נצרין ונשלול:

$$\neg\left(\forall\varepsilon>0\exists N\in\mathbb{N}\forall n>N\ :\ |a_n-L|<\varepsilon\right)$$

כשהשלילה "חולפת" על פני הכמת היא "הופכת" אותו – לכל הופך לקיים ולהיפך.
נקבל:

$$\exists\varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n > N \,:\, \neg\left(|a_n - L| < \varepsilon\right) \equiv \exists\varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n > N \,:\, |a_n - L| \geq \varepsilon$$