

## תרגיל 2 מד"ר סמסטר קיץ תשע"ו

13 ביולי 2016

1. מצאו את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

$$.y' = \frac{y}{x} + \tan \frac{y}{x} \quad (\text{א})$$

$$.y' = \frac{x^3 + y^2 \sqrt{x^2 + y^2}}{xy \sqrt{x^2 + y^2}} \quad (\text{ב})$$

$$.y' = -\frac{x+y-2}{x-y+4} \quad (\text{ג})$$

2. מצאו את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

$$.y' = -\frac{2y}{x} + x^2 y^4 \quad (\text{א})$$

$$.y' = y + \frac{\sin 2x}{y^2} \quad (\text{ב})$$

3. מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה:

$$y' = \frac{2 \cos^2 x - \sin^2 x + y^2}{2 \cos x}$$

אם ידוע שהפונקציה  $y = \sin x$  היא פתרון פרטי של המשוואה.

4. אוכלוסיית בקטריות (*Uchlusia*)  $U(t)$  באנגלית) מקיימת את המשוואה הלוגיסטית:

$$\frac{dU}{dt} = aU - bU^2$$

כאשר  $a, b > 0$ .

(א) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה.

(ב) חשבו את הגבול  $\lim_{t \rightarrow \infty} U(t)$ .

(ג) נתון:  $\lim_{t \rightarrow \infty} U(t) = 10000$ ,  $U(1) = 4000$ ,  $U(0) = 2000$ . מצאו את הפתרון הפרטי המתאים.

5. הוכיחו שאם הפונקציות  $y_1, y_2, y_3, y_4$  הן פתרונות שונים של משוואת ריקטי:

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$$

אזי הביטוי:

$$q = \frac{(y_3 - y_1)(y_4 - y_2)}{(y_3 - y_2)(y_4 - y_1)}$$

הוא קבוע. הסיקו שאם  $y_1, y_2, y_3$  פתרונות שונים, כל פתרון אפשר לכתוב בצורה:

$$y = \frac{y_2(y_1 - y_3) + Cy_1(y_3 - y_2)}{(y_1 - y_3) + C(y_3 - y_2)}$$

כאשר  $C$  קבוע. מהו הפתרון כאשר  $C = 0$ ? כאשר  $C = 1$ ? כאשר  $C \rightarrow \infty$ ?

6. הוכיחו שאם  $y_1, y_2$  פונקציות גזירות בקטע  $I$ , לכל  $x \in I$  מתקיים  $y_1(x) \neq 0$  והוורונסקיאן של  $y_1, y_2$  שווה ל-0 לכל  $x \in I$ , הפונקציות תלויות ליניארית בקטע  $I$ .

7. הוכיחו שמתקיים:

$$W(e^{a_1x}, e^{a_2x}, \dots, e^{a_nx}) = \prod_{k=1}^n e^{a_kx} \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

8. הוכיחו שעבור בחירה מתאימה של הקבועים  $a, b, c$ , הפונקציות  $x^\alpha, x^\beta, x^\gamma$  מקיימות את המשוואה:

$$x^3y''' + ax^2y'' + bxy' + cy = 0$$

הסיקו שהפונקציות  $x^\alpha, x^\beta, x^\gamma$  הן בת"ל אם ורק אם  $\alpha, \beta, \gamma$  שונים זה מזה.

9. פתרו את המשוואות הבאות בעזרת הפתרונות הנתונים של המשוואות ההומוגניות הקשורות:

$$(א) \quad y'' - \frac{2y'}{x} + \frac{2y}{x} = x \ln x, \quad x, x^2$$

$$(ב) \quad y'' - \left(2x + \frac{1}{x}\right)y' = x^4 e^{x^2}, \quad 1, e^{x^2}$$