חבורת הקומוטטרים

תהי G חבורה, ו$x, y \in G$,

$$[x,y] = xyx^{-1}y^{-1}$$

תת חבורת הנגזרת:

$$G' = \langle [x,y] : x, y \in G \rangle$$

ראיתם בהרצאה ש$G' \trianglelefteq G$. למשל ע"י

$$g[x,y]g^{-1} = g(xyx^{-1}y^{-1})g^{-1} = gxg^{-1}gyg^{-1}gx^{-1}g^{-1}gy^{-1}g^{-1} = [gxg^{-1}, gyg^{-1}]$$

שימו לב שהאיברים בG' הם לא בהכרח קומוטטרים בעצמם, אלא מכפלות של קומוטטרים.
הופכי של קומוטטור הוא גם קומוטטור

$$[x,y]^{-1} = [y,x]$$

משפט 1. G אבלית אמ"ם $G' = \{e\}$

הוכחה. G אבלית אמ"ם לכל $x, y \in G$ מתקיים $xy = yx$ אמ"ם $xyx^{-1}y^{-1} = e$. $\square$

מסקנה. אם G פשוטה ולא אבלית אז $G = G'$. הסבר: כי G' היא תת חבורה נורמלית, ולכן היא G או $\{e\}$. ואמרנו שזה שווה ל$\{e\}$ רק אם G אבלית.

הגדרה. חבורה נקראת "מושלמת" אם $G = G'$.

טענה. G/G' היא חבורה אבלית. ואם $N \trianglelefteq G$ כך שG/N אבלית, אז $G' \subseteq N$. מה שאומר שG' היא התת חבורה הקטנה ביותר כך שהמנה בה היא חבורה אבלית.

תרגיל. חשבו את D_3'

פתרון. $\langle \sigma \rangle \trianglelefteq D_3$ ו$D_3/\langle \sigma \rangle \cong \mathbb{Z}_2$ ולכן אבלי. אז $D_3' \subseteq \langle \sigma \rangle$. תתי החבורות היחידות של $\langle \sigma \rangle$ הן $\langle \sigma \rangle$ ו$\{e\}$. אבל $D_3' \neq \{e\}$ כי D_3 לא אבלית. לכן $D_3 = \langle \sigma \rangle$.

הערה. באותו אופן אפשר להוכיח עבור כל D_p כאשר p ראשוני.

תרגיל. חשבו את D_4'.

פתרון. $Z(D_4) = \langle \sigma^2 \rangle$. $|D_4/Z(D_4)| = 4$. כל חבורה מסדר p^2 היא אבלית. לכן $G' \leq Z(D_4)$. המרכז היא תת חבורה מסדר 2
לכן תתי החבורות היחידות שלה הן היא והטריוויאלית. $D_4' \neq \{e\}$ כי D_4 לא אבלית. לכן $D_4' = \langle \sigma^2 \rangle$.

תרגיל. חשבו את S_n' עבור $n \geq 5$.

פתרון. S_n' היא איזשהי תת חבורה נורמלית ולא טריוויאלית של S_n, ולכן זה שווה או לS_n או לA_n. ניתן לראות שהסימן של כל קומוטטור הוא 1 כי סימן הוא כיפלי, ולכן

$$sign(xyx^{-1}y^{-1}) = sign(x)sign(y)sign(x)^{-1}sign(y)^{-1} = 1$$

ולכן $G' \subseteq A_n$.

דרך נוספת לראות את זה היא: $S_n/A_n \cong \mathbb{Z}_2$ ולכן אבלית. זה אומר ש$S_n' \leq A_n$. לכן $S_n' = A_n$.

תרגיל. כנ"ל לגבי S_4.

פתרון. תתי החבורות הנורמליות של S_4 שהן לא טריוויאליות הן S_4, A_4, K_4. אנחנו יודעים ש$S_4' \leq A_4$ מאותה סיבה של התרגיל הקודם. אנחנו צריכים להבין את S_4/K_4. זאת חבורה מגודל 6. אם היא אבלית היא חייבת להיות $\mathbb{Z}_6$ (זאת החבורה האבלית היחידה מסדר 6) .

$$K_4 = \{(1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3), e\}$$

בS_4/K_4 יש שני איברים מסדר 2: $(1,2)K_4$ ו$(2,3)K_4$. זה שני קוסטים שונים, כי $(1,2)(2,3)^{-1} = (2,3,1) \notin K_4$.

ב$\mathbb{Z}_6$ יש רק איבר אחד מסדר 2- 3. לכן $S_4/K_4 \ncong \mathbb{Z}_6$ ולכן לא אבלית. לכן קיבלנו ש$S_4' = A_4$.

הגדרה 2. מגדירים סדרה של תתי חבורות ברקורסיה:

$$G^{(0)} = G$$

$$G^{(1)} = G' = [G,G]$$

$$G^{(n+1)} = (G^n)' = [G^n, G^n]$$

כל תת חבורה בשרשרת נורמלית בG.

הוכחה: באינדוקציה. עבור $n = 0$, ברור. נניח שG^n נורמלית בG ונראה שG^{n+1} נורמלית בG. מספיק להראות שקבוצת היוצרים של G^{n+1} סגורה להצמדה. היוצרים של G^{n+1} הם דברים מהצורה $[x,y]$ כאשר $x, y \in G^n$. ראינו ש

$$g[x,y]g^{-1} = [gxg^{-1}, gyg^{-1}]$$

זה מהצורה של קומוטטור של שני איברים מG^n, כי לפי הנחה G^n סגורה להצמדה.

משפט 3. חבורה היא פתירה אמ"ם קיים t כך ש: $G^{(t)} = \{e\}$.

הערה. אם G חבורה סופית, אז G לא פתירה אמ"ם יש n כך ש$G^{(n+1)} = G^n \neq \{e\}$.

תרגיל. תהי G חבורה פתירה. הוכיחו שיש לG תת חבורה נורמלית אבלית לא טריוויאלית.

פתרון. מהתנאי השקול לפתירות יש איזשהו n ראשון כך ש$G^{n+1} = \{e\}$. נקח $H = G^n$. אז $H \trianglelefteq G$, $H \neq \{e\}$ וH אבלית כי $H' = \{e\}$.

תרגיל. תהי G חבורה לא אבלית מסדר 28. הוכיחו ש $|G'| = 7$. הסיקו שG פתירה.

פתרון. נוכיח שתת חבורת סילו 7 , P, היא יחידה ולכן נורמלית.

$$n_7 \equiv 1 \mod 7 \wedge n_7 \mid 4$$

לכן $n_7 = 1$. אז יש חבורת 7 סילו אחת, לכן היא נורמלית.
$|G/P| = 4$ ולכן אבלית. לכן $G' \leq P$. אבל P מגודל 7, לכן תתי החבורות היחידות שלה זה היא או הטריוויאלית, והנחנו שG לא אבלית, אז $G' \neq \{e\}$ לכן $G' = P$.

$$G'' = P' = \{e\}$$

כי P אבלית.

מיון חבורות אבליות סופיות

תרגיל. הוכיחו כי

$$\mathbb{Z}_{200} \times \mathbb{Z}_{20} \cong \mathbb{Z}_{100} \times \mathbb{Z}_{40}$$

פתרון. הטריק הוא לחלק כל $\mathbb{Z}_n$ למכפלות של $\mathbb{Z}$ עם מספרים זרים.

$$\mathbb{Z}_{200} \cong \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{25}$$

$$\mathbb{Z}_{20} \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5$$

$$\mathbb{Z}_{100} \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{25}$$

$$\mathbb{Z}_{40} \cong \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_5$$

אז קיבלנו ש:

$$\mathbb{Z}_{200} \times \mathbb{Z}_{20} \cong \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{25} \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}_{100} \times \mathbb{Z}_{40}$$

תרגיל. כמה חבורות אבליות יש מסדר p^n כאשר p ראשוני?

פתרון. מספר החלוקות של n. כלומר, מספר הדרכים לכתוב את n כסכום של מספרים שלמים חיוביים עד כדי סדר.
מאיפה הגיע המספר הזה? כי חבורה אבלית מסדר p^n איזומורפית לאחת החבורות מהצורה

$$\mathbb{Z}_{p^{n_1}} \times \mathbb{Z}_{p^{n_t}}$$

כאשר $n_1 + ... + n_t$

בשביל להראות שהן שונות, נראה שמספר האיברים מסדר מסויים הוא שונה. כנראה שנקח את הn_i הכי גבוה שמופיע באחת מהן ולא בשניה.

$$A \times B \cong A \times C$$

שאלה למחשבה.

תרגיל. כמה חבורות אבליות יש מגודל m?

פתרון. נפרק את m למכפלה של גורמים ראשוניים. $m = p_1^{n_1} \cdots p_t^{n_t}$, לכן זה שווה ל$\rho(n_1)\rho(n_2)\cdots\rho(n_t)$.

תרגיל. רשמו את כל החבורות האבליות מסדר 180

פתרון. $180 = 3^2 \cdot 2^2 \cdot 5$. לכן מספר החבורות שווה ל$2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$

$$\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5$$

$$\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$$

$$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5$$

$$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$$

תרגיל. נתונה רשימה של חבורות. קבעו מי איזומורפית למי:

$$\mathbb{Z}_{180} \cong \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_4$$

$$\cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_5 \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{45}$$

$$\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{18} \cong \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_2$$

$$\cong \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5 \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{20}$$

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{30} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$$

$$\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{15} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$$

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{90} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$$

$1, 2, 4$ איזומורפיים. $3, 7$ איזומורפיים. $5, 6$ איזומורפיים.

תרגיל. תהי G חבורה מסדר $2m$ כאשר $(2,m)=1$ הוכיחו שיש תת חבורה מסדר m.

פתרון. הסתכלנו על שיכון קיילי $G \to S_{2m} \to \{-1,1\}$. לכן יש העתקה מ$G$ ל$\{-1,1\}$ הגרעין הוא תת חבורה שהאידקס שלה יהיה 1 או 2. כי $G/\ker \cong Im$. אז נותר להראות שההעתקה מG ל$\{-1,1\}$ היא על.

יש בG איבר g מסדר 2. התמורה שg מפעיל על איברי G היא מסדר 2, והיא מזיזה את כל האיברים בG (כי זה נקבע ע"י כפל משמאל, ולא יכול ליהות ש$gx = x$ כאשר $g \neq e$). לכן זה מכפלה של m חילופים. אז הסימן הוא $-1 = (-1)^m$ כי m אי זוגי.

תרגיל. הוכיחו שחבורה מסדר 120 היא לא פשוטה . רמז : $n_5 \neq 1$. הסתכלו על $G \to S_{n_5}$ האם היא לA_{n_5}.

פתרון. הפתרון רואים ש$n_5 = 6$. נניח בשלילה שהיא פשוטה. יש תת חבורה מאינדקס 6. (טענה שראינו בתרגול). לכן מהעידון של משפט קיילי יש הומומורפיזם $f : G \to S_6$ ובגלל שG פשוטה זה שיכון. A_6 מסדר 360 וS_6 מסדר 720.

אם G פשוטה אז התמונה שלה $f[G]$ היא פשוטה. $f[G] \cap A_6$ היא תת חבורה נורמלית של $f[G]$ מאינדקס 1 או 2 כי זה הגרעין של העתקת הסימן, אז בגלל ש$f[G]$ פשוטה נקבל ש$f[G] \cap$ $A_6 = f[G]$ ולכן $f[G] \subseteq A_6$. הסתירה תתקבל מכך שלA_6 אין תתי חבורות מגודל 120. הסבר : אז האינדקס הוא 3, ולכן יש הומומורפיזם מA_6 לS_3, ובגלל שA_6 פשוטה זה יהיה שיכון, וזה סתירה בגלל הגדלים.