תרגיל בית 7 ־ אינפי 3

19 בינואר 2017

שאלה 1

נתונה פונקציה

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases} xy\cdot\frac{x^{2}-y^{2}}{x^{2}+y^{2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

הוכח שכאן אינו מתקיים שוויון של נגזרות מעורבות, כלומר $f_{xy}\left(0,0\right)\neq f_{yx}\left(0,0\right)$. תנו הסבר למה זה קורה.

פתרון:

נבחר את העקומה הבאה אשר עוברת בראשית הצירים: $y=t$,$x=2t$ ולכן עבור $t=0$, למשל, $x=y=0$ והנקודה המתאימה היא $(0,0)$.

נגזרות החלקיות קיימות בנקודה ושוות לאפס.

לפי כלל השרשרת מקבלים:

$\frac{\partial f}{\partial t}\left(0\right)=f_{x}\left(0,0\right)\cdot\frac{dx}{dt}\left(0\right)+f_{y}\left(0,0\right)\cdot\frac{dy}{dt}\left(0\right)$, קל לראות ש־0 $f_{x}\left(0,0\right)=f_{y}\left(0,0\right)=0$, ולכן $\frac{\partial f}{\partial t}\left(0\right)=0$,

אף אם נסתכל על f כעל פונקציה של משתנה יחיד:

$f\left(x,y\right)=f\left(2t,t\right)=\frac{4t^{2}\cdot t}{4t^{2}+t^{2}}=\frac{4}{5}t$, ולכן: $\frac{\partial f}{\partial t}\left(0\right)=\frac{4}{5}\neq0$. זאת מכיוון שהפונקציה אינה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$, ולכן תנאי כלל השרשרת אינם מתקיימים.

שלאה 2

תהי $f\left(x,y\right)=e^{x}cos\left(y\right)$. חשבו את הדיפרציאל של f מסדר 3 בנקודות $(0,0)$ ו־$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

פתרון:

נחשב את הנגזרות החלקיות של הפונקציה עד לסדר 3.

נגזרות מסדר 1:

$$f_x = e^x cos\left(y\right)$$

$$f_y = -e^x sin\left(y\right)$$

מסדר 2:

$$f_{xx} = e^x cos\left(y\right)$$

$$f_{yy} = -e^x sin\left(y\right)$$

$$f_{xy} = -e^x sin\left(y\right)$$

מסדר 3:

$$f_{xxx} = e^x$$

$$f_{xxy} = -e^x sin\left(y\right)$$

$$f_{yyx} = -e^x cos\left(y\right)$$

$$f_{yyy} = e^x sin\left(y\right)$$

לפי הנוסחה לדיפרנציאל בנקודה $(0,0)$:

$$\tfrac{3!}{3!0!}f_{xxx}\left(0,0\right)dx^3+\tfrac{3!}{2!1!}f_{xxy}\left(0,0\right)dx^2dy+\tfrac{3!}{1!2!}f_{yyx}\left(0,0\right)dxdy^2+\tfrac{3!}{3!0!}f_{yyy}\left(0,0\right)dy^3$$

בנקודה $(0,0)$ שלנו:

$f_{xxx}\left(0,0\right)=1$, $f_{xxy}\left(0,0\right)=0$, $f_{xyy}\left(0,0\right)=-1$, $f_{yyy}\left(0,0\right)=0$

ולכן אנחנו מקבלים: $d^3_{(0,0)}f = dx^3 - 2dxdy^2$

ובנקודה $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$:

$f_{xxx}=0$, $f_{xxy}=-1$, $f_{xyy}=0$, $f_{yyy}=1$

ולכן: $d^3_{\left(0,\frac{\pi}{2}\right)}f = dy^3 - 2dx^2dy$

שאלה 3

חשבו פולינום טיילור של $f\left(x,y\right)=e^{x^2}\cdot sin\left(2y\right)$ בבסיס נקודה $(0,0)$ מסדר 5 .

הדרכה:

לא מומלץ לגזור את הפונק' 5 פעמים! השתמשו בטורים ידועים:

$e^{x^2}=\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{x^{2n}}{n!}$, $sin\left(y\right)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

טור טיילור של f הוא $f\left(x,y\right)=\left(1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\cdots\right)\cdot\left(y-\frac{y^3}{3!}+\frac{y^5}{5!}-\cdots\right)$.

תכפילו כמה איברים הראשונים ועבר פולינום טיילור בחרו את אותם איברים עם מעלה שאינה עולה על 5 .

פתרון:

נתבונן בטור $e^{x^2}=\sum\frac{x^{2n}}{n!}$, איברים עד סדר 5 הם: $e^{x^2}\approx 1+x^2+\frac{x^4}{2!}$, או באופן דומה איברים עד סדר 5 מהטור של $sin\left(y\right)$ הם:

$sin\left(y\right)\approx 2y-\frac{(2y)^3}{3!}+\frac{(2y)^5}{5!}$,

ולכן פולינום טיילור שמתקבל הוא:

$e^{x^2}sin\left(2y\right)\approx\left(1+x^2+\frac{x^4}{2!}\right)\left(2y-\frac{(2y)^3}{3!}+\frac{(2y)^5}{5!}\right)$,

אנו רוצים פולינום עד סדר ולכן נפתח את הביטוי ונעיף כל איבר מסדר גבוה יותר, ולבסף מקבלים את הפולינום הבא:

$$e^{x^2}sin\left(2y\right)\approx 2y+\frac{(2y)^3}{3!}+\frac{x^4}{2!}\cdot 2y-x^2\cdot\frac{(2y)^3}{3!}+\frac{(2y)^5}{5!}$$

אנו יודעים שזה אכן פיתוח טיילור משום שהוא יחיד.

שאלה 4

תהי $f\left(x,y\right)=e^{x^2y^3}$.

א) כתבו פולינום טיילור של f סביב $\left(0,0\right)$ עד סדר 19 .

רמז: כמו מקודם השתמשו בטורים ידועים.

פתרון:

נזכור את הפיתוח של e^x ונקבל עד סדר 19:

$$e^{x^2y^3}=1+x^2y^3+\frac{x^4y^6}{2!}+\frac{x^6y^9}{3!}$$

ב) מהיא $\frac{\partial f}{\partial x^8\partial y^{11}}\left(0,0\right)$?

פתרון:

מכיוון שבפיתוח הטיילור שלנו אין איבר ממעלה 19 , ובפרט האיבר x^8y^{11} לא נמצא, ברור ש:

$\frac{\partial f}{\partial x^8\partial y^{11}}\left(0,0\right)=0$.

שלאה 5

מצא טור טיילור סביב הנקודה $\left(0,0\right)$ של $f\left(x,y\right)=\frac{x}{1+y^2}$.

רמז: השתמשו בטור הנדסי.

פתרון:

נשתמש בטור הנדסי: $\frac{1}{1-y}=\sum y^n$

$\frac{x}{1+y^2}=x\sum(-1)^n y^{2n}=\sum(-1)^n xy^{2n}$

שלאה 6

יהיו $a,b\in\mathbb{R}$, כתבו מחדש את הפולינום טיילור מסדר של $3x^3+xy+y^2$ סביב הנקודה (a,b).

פתרון:

נרשם:

$$\begin{cases}\alpha=x-\alpha\\ \beta=y-b\end{cases}\leftarrow\begin{cases}x=\alpha+a\\ y=\beta+b\end{cases}$$

נציב במשוואה ונקבל:

$$P(x,y)=3(\alpha+a)^3+(\alpha+a)(\beta+b)+(\beta+b)^2=3\alpha^3+9\alpha^2a+9\alpha a^2+a^3+\alpha\beta+a\beta+\alpha b+\beta^2+2\beta b+b^2$$

נציב במקום α,β את $(x-a),(y-b)$ ונקבל:

$$3(x-a)^3+9a(x-a)^2+(y-b)^2+(x-a)(y-b)+b(x-a)+(a+2b)(y-b)+a^3+ab+b^2$$

שלאה 7

כתוב פיתוח טיילור של $f(x,y)=sin(xe^y)$ סביב הנקודה $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ עד סדר 2 .

פתרון:

נחשב את הנגזרות עד סדר 2 :

$f_x=cos(xe^y)e^y$, $f_y=cos(xe^y)xe^y$

$f_{xx}=-sin(xe^y)e^{2y}$, $f_{yy}=xe^ycos(xe^y)-sin(xe^y)x^2e^{2y}$

$f_{xy}=-sin(xe^y)xe^{2y}+cos(xe^y)e^y$

נציב את הנקודה שלנו ונקבל:

$f\left(\frac{\pi}{2},0\right)=1$, $f_x\left(\frac{\pi}{2},0\right)=f_y\left(\frac{\pi}{2},0\right)=0$,

$f_{xx}\left(\frac{\pi}{2},0\right)=-1$, $f_{xy}\left(\frac{\pi}{2},0\right)=-\frac{\pi}{2}$, $f_{yy}\left(\frac{\pi}{2},0\right)=-\frac{\pi^2}{4}$

ולכן הפיתוח הוא :

$$f(x,y)=1+\frac{1}{2}\left(-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2-\pi\left(x-\frac{\pi}{2}\right)y-\frac{\pi^2}{4}y^2\right)+o\left(\|(x,y)\|^2\right)$$

שאלה 8

תהי $g\left(t\right)$ פונקציה של משתנה 1, גזירה ברציפות k פעמים בקטע פתוח $I\in\mathbb{R}$ כך ש־$0\in I$. נגדיר $f\left(x,y\right)=g\left(x+y\right)$. הוכח $d^{k}f\left(0,0\right)=g^{(k)}\left(0\right)\left(x+y\right)^{k}$.

פתרון:

לפי הנוסחה לדיפרנציאל:

$$d_{(0,0)}^{k}f\left(x,y\right)=\sum_{\alpha_{1}+\alpha_{2}=k}\frac{k!}{\alpha_{1}!\cdot\alpha_{2}!}\cdot\frac{\partial^{k}f}{\partial x^{\alpha_{1}}\partial x^{\alpha_{2}}}\left(0,0\right)x^{\alpha_{1}}y^{\alpha_{2}},$$

במקרה שלנו:

$$f_{x}\left(x,y\right)=f_{y}\left(x,y\right)=g^{'}\left(x+y\right)$$

ולכן:

$$\frac{\partial^{k}f}{\partial x^{\alpha_{1}}\partial x^{\alpha_{2}}}\left(x,y\right)=g^{(k)}\left(x,y\right)$$

ולפיכך:

$$\frac{\partial^{k}f}{\partial x^{\alpha_{1}}\partial x^{\alpha_{2}}}\left(0,0\right)=g^{(k)}\left(0\right)$$

נציב ונקבל:

$$d_{(0,0)}^{k}f\left(x,y\right)=\sum_{\alpha_{1}+\alpha_{2}=k}\frac{k!}{\alpha_{1}!\cdot\alpha_{2}!}g^{(k)}\left(0\right)x^{\alpha_{1}}y^{\alpha_{2}}$$

$g^{(k)}\left(0\right)$ הוא ביטוי קבוע ביחס לסכום ולכן אפשר לשלוף אותו החוצה מהסכום:

$$d_{(0,0)}^{k}f\left(x,y\right)=g^{(k)}\left(0\right)\cdot\sum_{\alpha_{1}+\alpha_{2}=k}\frac{k!}{\alpha_{1}!\cdot\alpha_{2}!}x^{\alpha_{1}}y^{\alpha_{2}}$$

ומנסחת הבינום של ניוטון נקבל שאכן:

$$d_{(0,0)}^{k}f\left(x,y\right)=g^{(k)}\left(0\right)\left(x+y\right)^{k}$$