

תרגיל 12 מבוא לתורת החבורות

שאלה 12.1 נתונה $G = S_3$ ונתון שהיא פועלת על הקבוצה $X = \{R, G, B\}$. נתון עוד כי

$$(123) * R = G$$

$$(12) * R = B$$

מצאו לפי אינפורמציה זו את הפעולה של כל איבר בחבורה על כל איבר בקבוצה X . אפשר לתאר את הפעולה באמצעות טבלת כפל. כל שורה מתאימה לאיבר $g \in G$ וכל עמודה לאיבר $x \in X$ התא בשורה g בעמודה x יכיל את האיבר $g * x = gx$.

שאלה 12.2 1. תהי G חבורה הפועלת על קבוצה X - נסמן את הפעולה ב $*$. תהי $N \triangleleft G$ תת חבורה נורמלית. ננסה להגדיר פעולה של G/N על X לפי

$$gN \diamond x = g * x$$

האם זה מגדיר פעולה של G/N על X ? הוכיחו או הפריכו.

2. תהי G חבורה ו $N \triangleleft G$ תת חבורה נורמלית. נתון כי G/N פועלת על X - נסמן את הפעולה ב $*$. ננסה להגדיר פעולה של G על X לפי

$$g \diamond X = gN * x$$

האם זה מגדיר פעולה של G/N על X ? הוכיחו או הפריכו.

שאלה 12.3 תהי X קבוצת כל הלוחות 2×2 שכל ריבוע שלהם צבוע באחד משני הצבעים שחור/לבן. שימו לב שיש $2^4 = 16$ לוחות כאלה. ניקח $G = \mathbb{Z}_4$ ונגדיר פעולה כפי שעשינו בכיתה. כלומר: לכל $a \in \mathbb{Z}_4$ הלוח המתקבל $a * x$ הוא סיבוב הלוח x ב $90 \cdot a$ מעלות. מצאו את כל המסלולים (מה האיברים בכל מסלול?). כמה מסלולים יש?

שאלה 12.4 תהיינה G, H שתי חבורות שפועלות על X, Y בהתאמה. נגדיר פעולה של $G \times H$ על $X \times Y$ באופן הטבעי כלומר

$$(g, h) * (x, y) = (gx, hy)$$

הוכיחו כי המסלולים של הפעולה של $G \times H$ הם בדיוק קבוצות מהצורה $A \times B$ כאשר A מסלול של G ו B מסלול של H .

שאלה 12.5 ניקח את S_n שפועלת על $X = \{1, \dots, n\}$. ראינו כבר שהפעולה הזאת טרנזיטיבית. מצאו את המסלולים של הפעולה של S_n על $X \times X$ המוגדרת לפי

$$\pi \cdot (x, y) = (\pi(x), \pi(y))$$

כמה מסלולים יש?

שאלה 12.6 1. הוכיחו כי תת חבורה $H \leq G$ היא תת חבורה נורמלית אם ורק אם לכל $a \in G$ מתקיים שמחלקת הצמידות של a מוכלת כולה ב H או ב $G \setminus H$.

2. הוכיחו כי חבורה G היא אבלית אם ורק אם כל מחלקת צמידות מכילה איבר אחד בלבד.

שאלה 12.7 מצאו את מחלקות הצמידות בחבורה:

1. S_3 .

2. D_4 .

הוכיחו.