תרגיל 3

1. הוכיחו כי הסדרות הבאות מתכנסות לגבולות הרשומים בצד ימין.

א. 0 $\quad a_n = \frac{1}{n+27}$

$$|a_n - L| = \left|\frac{1}{n+27} - 0\right| = \frac{1}{\mathrm{n}+27} < \frac{1}{n}$$

יהי $\epsilon > 0$. נבחר $N = \left\lceil\frac{1}{\epsilon}\right\rceil$. אם $n > N$ אז $n > \frac{1}{\epsilon}$ ומתקיים $|a_n - L| < \frac{1}{n} < \epsilon$ כדרוש.

ב. 1 $\quad \mathrm{a_n} = \frac{n+3}{n+32}$

$$|a_n - L| = \left|\frac{n+3}{n+32} - 1\right| = \frac{29}{\mathrm{n}+32} < \frac{29}{n}$$

יהי $\epsilon > 0$. נבחר $N = \left\lceil\frac{29}{\epsilon}\right\rceil$. אם $n > N$ אז $n > \frac{29}{\epsilon}$ ומתקיים $|a_n - L| < \frac{29}{n} < \epsilon$ כדרוש.

ג. 4 $\quad \mathrm{a_n} = \frac{4n^2-25}{n^2-16}$

$$|a_n - L| = \left|\frac{4n^2-25}{n^2-16} - 4\right| = \frac{39}{n^2-16} < \frac{39}{n^2 - \frac{1}{2}n^2} = \frac{78}{n^2}$$

יהי $\epsilon > 0$. נבחר $N = \left\lceil\sqrt{\frac{78}{\epsilon}}\right\rceil$. אם $n > N$ אז $n > \sqrt{\frac{78}{\epsilon}}$ ומתקיים $|a_n - L| < \frac{78}{n^2} < \epsilon$ כדרוש.

2. מיצאו את הגבולות של הסדרות הבאות והוכיחו כי הן מתכנסות אליהם, או הוכיחו כי הן אינן מתכנסות.

א. $\mathrm{a_n} = \frac{(-1)^n}{n^8}$

אינטואיטיבית "מנחשים" שהגבול הוא 0. נוכיח זאת:

$$|a_n - L| = \left|\frac{(-1)^n}{n^8} - 0\right| = \frac{1}{n^8} < \frac{1}{n}$$

יהי $\epsilon > 0$. נבחר $N = \left\lceil\frac{1}{\epsilon}\right\rceil$. אם $n > N$ אז $n > \frac{1}{\epsilon}$ ומתקיים $|a_n - L| < \frac{1}{n} < \epsilon$ כדרוש.

ב. $a_n = \frac{1+(-1)^n}{2^n+24}$

אינטואיטיבית "מנחשים" שהגבול הוא 0. נוכיח זאת:

$$|a_n - L| = \left|\frac{1+(-1)^n}{2^n+24} - 0\right| = \frac{1+(-1)^n}{2^n+24} < \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{1}{n}$$

(המעבר האחרון $2^{n-1} \geq n$ לכל n טבעי באינדוקציה: בסיס $n = 1$, אכן $2^0 \geq 1$. נניח כי מתקיים $2^{k-1} \geq k$ ואז $2^k = 2 \cdot 2^{k-1} \geq 2k \geq k+1$.)

יהי $\epsilon > 0$. נבחר $N = \left\lceil\frac{1}{\epsilon}\right\rceil$. אם $n > N$ אז $n > \frac{1}{\epsilon}$ ומתקיים $|a_n - L| < \frac{1}{n} < \epsilon$ כדרוש.

ג. $a_n = \frac{n^3-n^2+\sqrt{n}}{n^3+n^2-\sqrt{n}}$

אינטואיטיבית "מנחשים" שהגבול הוא 1. נוכיח זאת:

$$|a_n - L| = \left|\frac{n^3 - n^2 + \sqrt{n}}{n^3 + n^2 - \sqrt{n}} - 1\right| = \left|\frac{-2n^2 + 2\sqrt{n}}{n^3 + n^2 - \sqrt{n}}\right| = \frac{2n^2\text{-}2\sqrt{n}}{n^3 + n^2 - \sqrt{n}} < \frac{2n^2}{n^3 - \sqrt{n}} < \frac{2n^2}{n^3 - \frac{1}{2}n^3} = \frac{4}{n}$$

הסבר למעבר הלפני אחרון: $\frac{1}{2}n^3 > \sqrt{n}$ לכל $n \geq 2$ כי $n^6 > 4n$ לכל $n \geq 2$ כי $n(n^5 - 4) > 0$ לכל $n \geq 2$.

יהי $\epsilon > 0$. נבחר $N = \left\lceil\frac{4}{\epsilon}\right\rceil$. ואז אם $n > N$ אז אז בפרט $n \geq 2$ והחישוב לעיל תקף, וכיוון ש-$n > \frac{4}{\epsilon}$ אז

$$|a_n - L| = \frac{4}{n} < \frac{4}{4/\epsilon} = \epsilon$$

כדרוש.

3. הוכיחו כי $a_n = \frac{\sqrt{n}+n}{2n-7\sqrt{n}}$ לא מתכנסת ל-$\frac{1}{7}$.

הגדרת a_n מתכנסת ל-$\frac{1}{7}$: לכל $\epsilon > 0$ יש N כך שלכל $n > N$ טבעי מתקיים $\left|\frac{\sqrt{n}+n}{2n-7\sqrt{n}} - \frac{1}{7}\right| < \epsilon$.

ולכן הגדרת a_n איננה מתכנסת ל-$\frac{1}{7}$: יש $\epsilon > 0$ כך שלכל N יש $n > N$ טבעי כך ש-$\left|\frac{\sqrt{n}+n}{2n-7\sqrt{n}} - \frac{1}{7}\right| \geq \epsilon$.

מתקיים $\frac{5}{14} = \frac{5n}{14n} \geq \frac{14\sqrt{n}+5n}{14n-49\sqrt{n}} = \left|\frac{14\sqrt{n}+5n}{14n-49\sqrt{n}}\right| = \left|\frac{\sqrt{n}+n}{2n-7\sqrt{n}} - \frac{1}{7}\right|$. המעבר השני נכון רק ל-$n \geq 13$.

לכן נוכל לבחור $\epsilon = \frac{5}{14}$ ואז לכל $n \geq 13$ טבעי מתקיים $\left|\frac{\sqrt{n}+n}{2n-7\sqrt{n}} - \frac{1}{7}\right| \geq \epsilon$. *כלומר, בהינתן* N*, נבחר* $n = max(N + 1{,}13)$.

<u>הערה:</u> היה ניתן לפתור תרגיל זה גם כך: להוכיח ישירות שהסדרה מתכנסת ל-$\frac{1}{2}$ ולכן גבולה איננו $\frac{1}{7}$ מיחידות הגבול.

4. להזכירכם, אי-שוויון המשולש אומר שלכל a, b ממשיים מתקיים $|a + b| \leq |a| + |b|$.

א. יהיו a, b, c מספרים ממשיים. הוכיחו כי אם $|a - b| < 7$ וגם $|b - c| < 48$ אז $|a - c| < 55$.

$$|a - c| = |a - b + b - c| \leq |a - b| + |b - c| < 7 + 48 = 55$$

ב. יהיו a, b, c מספרים ממשיים, ϵ, ζ ממשיים חיוביים. הוכיחו כי אם $|a - b| < \epsilon$, וגם $|b - c| < \zeta$ אז $|a - c| < \epsilon + \zeta$.

$$|a - c| = |a - b + b - c| \leq |a - b| + |b - c| < \epsilon + \zeta$$

5. להזכירכם, הגדרנו: סדרה ממשית (a_n) מתכנסת למספר הממשי L אם:

לכל $\epsilon > 0$ ממשי קיים N טבעי כך שלכל n טבעי המקיים $n > N$ מתקיים $|a_n - L| < \epsilon$.

א. הראו כי אם בהגדרה לעיל משנים את $n > N$ ל-$n \geq N$ מתקבלת הגדרה שקולה.

הגדרה שקולה כלומר: כל סדרה שמתכנסת לפי ההגדרה לעיל מתכנסת גם לפי ההגדרה עם $n \geq N$ ולאותו גבול, ולהיפך.

נניח כי (a_n) מקיימת את $\forall\epsilon > 0\ \exists N_1 \in \mathbb{N}\ \forall n > N_1\ \ |a_n - L| < \epsilon$ ורוצים להראות שהיא מקיימת את

$\forall\epsilon > 0\ \exists N_2 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N_2\ \ |a_n - L| < \epsilon$.

יהי $\epsilon > 0$. לפי ההנחה יש N_1 טבעי כך שלכל n טבעי המקיים $n > N_1$ מתקיים $|a_n - L| < \epsilon$.

נבחר $N_2 = N_1 + 1$. ואז אם $n \geq N_2$ כלומר $n \geq N_1 + 1$ אז $n > N_1$ ולכן לפי ההנחה $|a_n - L| < \epsilon$ כדרוש.

בכיוון ההפוך אפשר לבחור את אותו ה-N כי אם משהו מתקיים לכל $n \geq N$ אז הוא מתקיים גם לכל $n > N$.

ב. באופן דומה, הראו כי אם משנים את $|a_n - L| < \epsilon$ בהגדרה לעיל ל- $|a_n - L| \leq \epsilon$, מתקבלת הגדרה שקולה.

נניח כי (a_n) מקיימת את $\forall\epsilon_1 > 0\ \exists N_1 \in \mathbb{N}\ \forall n > N_1\ \ |a_n - L| \leq \epsilon_1$ ורוצים להראות שהיא מקיימת את

$\forall\epsilon_2 > 0\ \exists N_2 \in \mathbb{N}\ \forall n > N_2\ \ |a_n - L| < \epsilon_2$.

יהי $\epsilon_2 > 0$. נבחר $\epsilon_1 = \frac{\epsilon_2}{2}$. אז לפי ההנחה יש N_1 כך שלכל $n > N_1$ מתקיים $|a_n - L| \le \epsilon_1 = \frac{\epsilon_2}{2} < \epsilon_2$. נבחר $N_2 = N_1$ ואז אכן אם $n > N_2$ אז $n > N_1$ ומתקיים $|a_n - L| < \epsilon_2$ כדרוש.

בכיוון ההפוך אפשר לבחור את אותו ה-N כי אם $|a_n - L| < \epsilon$ אז גם $|a_n - L| \le \epsilon$.

ג. הראו שההגדרה לעיל ***איננה*** שקולה להגדרה בה משנים את $\epsilon > 0$ ל- $\epsilon \ge 0$.

אף סדרה איננה מקיימת את ההגדרה עם $\epsilon \ge 0$, כי עבור $\epsilon = 0$ מקבלים שצריך להתקיים $|a_n - L| < 0$, מה שאף פעם לא מתקיים.

מצד שני ראינו שכן יש סדרות שמקיימות את הגדרת התכנסות, למשל $a_n = \frac{1}{n}$.

6. תהי a_n סדרה המתכנסת למספר π. נגדיר סדרה חדשה b_n שזהה לסדרה המקורית a_n בכל אחד מהאינדקסים מלבד האינדקס 314, ובאינדקס זה מתקיים $b_{314} = 2a_{314}$. הוכיחו כי b_n מתכנסת גם היא למספר π.

נתון כי $a_n \to \pi$ כלומר לכל $\epsilon > 0$ יש N כך שלכל $n > N$ טבעי מתקיים $|a_n - \pi| < \epsilon$.

צ"ל כי $b_n \to \pi$ כלומר כי לכל $\epsilon > 0$ יש N כך שלכל $n > N$ מתקיים $|b_n - \pi| < \epsilon$.

יהי $\epsilon > 0$. כיוון ש-$a_n \to \pi$ יש N' כך שלכל $n > N'$ טבעי מתקיים $|a_n - \pi| < \epsilon$.

נבחר $N = max(N', 314)$. ואז אם $n > N$ אז בפרט $n > 314$ כלומר $b_n = a_n$. כמו כן $n > N'$ ולכן $|a_n - \pi| < \epsilon$ כלומר $|b_n - \pi| < \epsilon$, מש"ל.