תרגיל 11

1. ענו על הסעיפים הבאים:

(א) יהי X מרחב טופולוגי דיסקרטי עם בסיס B. הוכיחו שלכל $x \in X$, $\{x\} \in B$.
פתרון:

כזכורת אם B בסיס לטופולוגיהת וO קבוצה פתוחה $x \in O$, אז יש $V \in B$ כך ש $x \in V \subseteq O$. נקח $O = \{x\}$. אז חייב להתקיים ש $V = \{x\}$.

(ב) יהי X מרחב טופולוגי דיסקטי. תהא $f : X \to Y$ פונקציה על. הוכיחו כי טופולוגית המנה על Y היא הדיסקטית.
פתרון:

תהא $O \subseteq Y$ אזי $f^{-1}(O)$ פתוחה בX(כל קבוצה פתוחה ב X) ולכן O פתוחה ב Y.

(ג) יהי X מרחב טופולוגי עם בסיס B, Y קבוצה, ו$f : X \to Y$ פונקציה על. הוכיחו/הפריכו: $B' = \{O \subseteq Y : f^{-1}(O) \in B\}$ הוא בסיס לטופולוגיית המנה על Y.
פתרון: הפרכה:

נגדיר $X = \{1, 2, 3\}$ עם הטופולוגיה הדיסקרטית. לכן $B = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ הוא בסיס. נגדיר $f : X \to Y = \{a, b\}$ (עבור $a \neq b$) ע"י $f(1) = f(2) = a, f(3) = b$. זוהי פונקציה על ולכן טופולוגית המנה היא הדיסקטית. אבל

$$B' = \{O \subseteq Y : f^{-1}(O) \in B\} = \{\{b\}\}$$

שאינו מכיל את הנקודון $\{a\}$ ולכן B' לא יכול להיות בסיס לטופולוגיה הדיסקרטית.

(ד) יהי $\mathbb{R}_l$ הישר של סורגנפריי, ו$f : \mathbb{R}_l \to \mathbb{Z}$ פונקציית הערך השלם (שהיא על). מהי טופולוגיית המנה של $\mathbb{Z}$ ביחס לf?
פתרון:

הטופולוגיה היא הדיסקרטית. לצורך כך מספיק להראו שכל הנקודונים פתוחים. יהי $x \in \mathbb{Z}$. $f^{-1}\{x\} = [x, x+1)$ פתוח בישר של סורגנפריי.

2. נתבונן ב$\mathbb{R}$ עם הטופולוגיה הסטנדרטית, וב$f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ פונקציית הערך השלם התחתון $f(x) = \lfloor x \rfloor$. נסמן בτ את טופולוגיית המנה על $\mathbb{Z}$ ביחס לf.

(א) הוכיחו שמתקיים: $O \in \tau \iff [\forall n \in \mathbb{Z} : (n \in O \Rightarrow n-1 \in O)]$.
פתרון:

($\Leftarrow$) תהי $O \in \tau$ ו $n \in O$ צ"ל $n-1 \in O$. אכן, מהגדרת טופולוגית המנה נקבל כי $n \in f^{-1}(O)$ פתוח ב $\mathbb{R}$ לכן קיימת סביבה פתוחה $(n-\epsilon, n+\epsilon)$ מוכלת ב

$f^{-1}(O)$ עבור $\epsilon < 1$. בפרט קיים $n > x$ כך ש $x \in (n-\epsilon, n+\epsilon) \subseteq f^{-1}(O)$ מה שאומר כי $f(x) = \lfloor x \rfloor = n-1 \in O$.

($\Rightarrow$) תהי O שמקיימת את התנאי $[\forall n \in \mathbb{Z} : (n \in O \Rightarrow n-1 \in O)]$. צ"ל ש $f^{-1}(O)$ פתוח ב$\mathbb{R}$. יהי $x \in f^{-1}(O)$. אם $x \notin \mathbb{Z}$, אז יש $n \in \mathbb{Z}$ כך ש $n-1 < x < n$. $f(x) = \lfloor x \rfloor = n-1$. כמו כן, $f(n-1, n) = n-1$. לכן $x \in (n-1, n) \subseteq f^{-1}(O)$. כלומר יש סביבה פתוחה של x שמוכלת ב $f^{-1}(O)$.

כעת, אם $x = n \in \mathbb{Z}$, אז $f(n) = n \in O$. לכן מהתנאי, $n-1 \in O$. נקבל ש $n \in (n-1, n+\dfrac{1}{2}) \subseteq f^{-1}(O)$, כי כל איבר בקטע הנ"ל, הערך השלם התחתון שלו הוא $n-1$ או n. בכל מקרה, קיבלנו שלכל $x \in f^{-1}(O)$ יש סביבה פתוחה שמוכלת ב$f^{-1}(O)$ ולכן $f^{-1}(O)$ פתוחה ב$\mathbb{R}$, כלומר, O פתוחה בטופולוגיית המנה.

(ב) הסיקו כי $\tau = \{\mathbb{Z}, \emptyset\} \cup \{(-\infty, M] \cap \mathbb{Z}\}_{M \in \mathbb{Z}}$

פתרון:

ברור שכל הקבוצות בסעיף ב' עונות על התנאי מסעיף א' ולכן פתוחות. מצד שני, תהי O שעונה על התנאי מסעיף א'. אם $O = \emptyset$, סיימנו. אחרת, יש $x \in O$. אם קבוצת האיברים בO אינה חסומה, אז לכל $m \in \mathbb{Z}$ יש $m < n$ כך ש $n \in O$. לפי התנאי, זה אומר ש $m \in O$. נקבל ש $O = \mathbb{Z}$. אחרת, נקח את האיבר המקסימלי בO. נסמנו בM. (נשים לב שלכל קבוצה חסומה ב$\mathbb{Z}$ יש מקסימום). אז לפי התנאי ברור ש $(-\infty, M] \cap \mathbb{Z} \subseteq O$. מצד שני, לכל $n \geq M$, $n \notin O$, כי M הוא המקסימום. לכן, $O = (-\infty, M] \cap \mathbb{Z}$. כלומר, $\tau = \{\mathbb{Z}, \emptyset\} \cup \{(-\infty, M] \cap \mathbb{Z}, M \in \mathbb{Z}\}$.

3. ענו על הסעיפים הבאים:

(א) יהיו X, Y מרחבים מטריים, ו $f : X \to Y$ ו$g : Y \to X$ פונקציות רציפות, כך ש $f \circ g = id_Y$. הוכיחו כי f העתקת מנה.

פתרון:

ראשית, מכך ש $f \circ g = id_Y$ נובע ש f על. מכיוון ש f רציפה, אם $O \subseteq Y$ פתוחה, אז $f^{-1}(O)$ פתוחה. כעת נראה את הכיוון השני. תהי $O \subseteq Y$ כך ש $f^{-1}(O)$ פתוחה. g רציפה ולכן $g^{-1}(f^{-1}(O)) \subseteq Y$ פתוחה. אבל $g^{-1}(f^{-1}(O)) = (f \circ g)^{-1}(O) = id_Y^{-1}(O) = O$. כלומר, O פתוחה.

(ב) תהי $f : X \to Y$ העתקת מנה. הוכיחו שf הומיאומורפיזם $\iff$ f חח"ע.

פתרון:

($\Leftarrow$)אם f הומיאומורפיזם, אז בפרט f חח"ע.

($\Rightarrow$) אם f חח"ע ומנה אז נקבל ש f חח"ע ועל ורציף. נוכיח שf פתוח. יהי $O \subseteq X$ פתוח. מכיוון שf חח"ע ועל, $O = f^{-1}(f(O))$. לכן, מהגדרת העתקת מנה, $f(O)$ פתוח. מש"ל.

.4

(א) נגדיר יחס שקילות על $\mathbb{R}^2$ ע"י: $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff x_1 + y_1^2 = x_2 + y_2^2$. הוכיחו ש $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^2/\sim$. רמז: מצאו את העתקה ההפוכה ל$\hat{f}$ מ$\mathbb{R}$ ל$\mathbb{R}^2/\sim$.

פתרון:

נגדיר $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ע"י $f(x,y)=x+y^2$. f רציפה כפולינום. מקיימת $(x,y)\sim(x',y')$ אמ"מ התמונות תחת f שוות, וכן f על, כי למשל מקור של r הוא $(r,0)$. לכן קיימת $\hat{f}:\mathbb{R}^2/\sim\to\mathbb{R}$ והיא חח"ע, על ורציפה. נוכיח שההופכית רציפה. נגדיר את ההופכית כך $g(r)=[(r,0)]$. זה בעצם הרכבה של שתי פונקציות: $g':\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ המוגדרת ע"י $g'(r)=(r,0)$, ופונקציית המנה ששולחת כל איבר למחלקת השקילות שלו. g' רציפה כי היא רציפה רכיב־רכיב (פונקציית הזהות ופונקציה קבועה), ופונקציית המנה רציפה מההגדרה של טופולוגיית המנה. כלומר, g היא הרכבה של פונקציות רציפות ולכן רציפה.

קל לראות שg ו $\hat{f}$ הופכיות אחת לשניה.

(ב) נגדיר יחס שקילות על $\mathbb{R}^2$: $(x_1,y_1)\sim(x_2,y_2)\iff x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2$. למה הומיאומורפי $\mathbb{R}^2/\sim$?

פתרון:

$\mathbb{R}^2/\sim\cong[0,\infty)$.

הוכחה: נגדיר את הפונקציה הבאה: $f:\mathbb{R}^2\to[0,\infty)$ ע"י $f(x,y)=x^2+y^2$. f רציפה כפולינום ומקיימת $(x,y)\sim(x',y')$ אמ"מ התמונות תחת f שוות. כמו כן f על, כי המקור של $r\geq 0$ הוא $(\sqrt{r},0)$. לכן יש $\hat{f}:\mathbb{R}^2/\sim\to[0,\infty)$ מוגדרת, רציפה, חח"ע ועל. נמצא את ההופכית. נסתכל על $g(r)=[(\sqrt{r},0)]$. קל לראות שהיא אכן ההופכית של $\hat{f}$. כמו בסעיף א, g היא הרכבה של פונקציות $g':[0,\infty)\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $g'(r)=(\sqrt{r},0)$, ופונקציית המנה $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}/\sim$. g' רציפה רכיב־רכיב ולכן רציפה. קיבלנו שg היא הרכבה של פונקציות רציפות ולכן רציפה.

5. יהי X מרחב המנה של $\mathbb{R}$ המתקבל ע"י זיהוי כל הנקודות מנורמה גדולה שווה מ1. כלומר $x\sim x'$ אמ"ם $x=x'$, או ש $|x|\geq 1\wedge|x'|\geq 1$. הוכיחו ש $X\cong S^1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x^2+y^2=1\}$.

פתרון:

נגדיר $f:\mathbb{R}\to S^1$ ע"י

$$f(x)=\begin{cases}(-1,0) & |x|\geq 1\\ (\cos(\pi x),\sin(\pi x)) & |x|<1\end{cases}$$

כלומר הנקודות מנורמה גדול שווה מ 1 מועתקים ל $(-1,0)$ וכל הנקודת בקטע $(-1,1)$ מועתקות למעגל בלי הנקודה $(-1,0)$. הפונקציה f היא על ורציפה (כי היא רציפה בקבוצה הסגורה $(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$ ורציפה בקבוצה הסגורה $[-1,1]$ ומסכימה על החיתוך) ובנוסף מתקיים כי $x\sim x'\iff f(x)=f(x')$ לכן $\hat{f}:X\to S^1$ מוגדרת, חח"ע, על ורציפה. בנוסף Xקומפקטי כי הוא התמונה הרציפה של ρ מצומצת על $[-1,1]$ שקומפקטי ו S^1 הוא T_2 ולכן $\hat{f}$ סגורה ולכן הומי'.

6. תנו דוגמא להעתקת מנה שהיא לא פתוחה ולא סגורה.

פתרון:

נחזור על הדוגמא מהתרגול. תהי $X=[0,1]$, ו$Y=\{0,1\}$ עם טופולוגיית שרפינסקי.

נגדיר את הפונקציה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, \frac{1}{2}) \\ 1 & x \in [\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$

בדקו שזוהי אכן פונקציית מנה. f לא פתוחה כי $f(\frac{2}{3}, \frac{3}{4}) = \{1\}$, שהוא לא פתוח, ולא סגורה כי $f[0, \frac{1}{4}] = \{0\}$, שהוא לא סגור.