אלגברה לינארית 1

משפטים למבחן

קיץ 2014

ערן רכס

<u>משפט:</u> $V = U \oplus W$ אם ורק אם כל וקטור ב-V ניתן להצגה יחידה $v = u + w$.

<u>הוכחה:</u> $\Longleftarrow$ נניח ש-$V = U \oplus W$. <u>צ.ל:</u> כל וקטור ב-V ניתן להצגה יחידה $v = u + w$.

יהא $v \in V$ כך ש-$v = u_1 + w_1$ וכן $v = u_2 + w_2$, כלומר קיימות לו שתי הצגות.

לכן:

$$u_1 + w_1 = u_2 + w_2$$

$$u_1 - u_2 = w_2 - w_1$$

$u_1 - u_2 \in U$ וכן $w_2 - w_1 \in W$ שהרי U ו-W תתי-מרחבים ולכן סגורים לחיבור ולכפל.

$V = U \oplus W$ ולכן $U \cap W = \{\vec{0}\}$, כלומר בהכרח מתקיים:

$u_1 - u_2 = \vec{0}$ וכן $w_2 - w_1 = \vec{0}$.

לכן $u_1 = u_2$, $w_2 = w_1$ כנדרש, כלומר קיימת הצגה יחידה.

$\Longrightarrow$ נניח שכל וקטור ב-V ניתן להצגה יחידה $v = u + w$. <u>צ.ל:</u> $V = U \oplus W$.

יהי $v \in U \cap W$, לכן $v \in U$ וכן $v \in W$.

מתקיים:

$$v = \underbrace{v}_{\in U} + \underbrace{\vec{0}}_{\in W}$$

$$v = \underbrace{\vec{0}}_{\in U} + \underbrace{v}_{\in W}$$

לפי הנתון ל-v יש הצגה יחידה, ולכן:

$$\underbrace{v}_{\in U} + \underbrace{\vec{0}}_{\in W} = \underbrace{\vec{0}}_{\in U} + \underbrace{v}_{\in W}$$

$$v = \vec{0}$$

מכאן שבהכרח $U \cap W = \{\vec{0}\}$ כנדרש.

■

משפטון ההחלפה של שטייניץ: תהא B קבוצה פורשת של מרחב וקטורי V. $A \subseteq V$ בת"ל.

אזי לכל $a \in A$ קיים $b \in B$ כך ש-$A\backslash\{a\} \cup \{b\}$ בת"ל וגם

$b \notin A\backslash\{a\}$.

הוכחה: נניח בשלילה שקיים $a \in A$ כך שלכל $b \in B$ מתקיים:

$A\backslash\{a\} \cup \{b\}$ ת"ל או $b \in A\backslash\{a\}$.

יהי $b \in B$. אם $b \in A\backslash\{a\}$ אזי $b \in Span(A\backslash\{a\})$.

אם $A\backslash\{a\} \cup \{b\}$ ת"ל, בגלל ש-$A\backslash\{a\}$ בת"ל נקבל ש-$b \in Span(A\backslash\{a\})$.

כלומר, בכל מקרה מתקיים $b \in Span(A\backslash\{a\})$.

לכן:

$$B \subseteq Span(A\backslash\{a\})$$

$Span(B)$ הוא תת המרחב הקטן ביותר המכיל את B, ולכן:

$$Span(B) \subseteq Span(A\backslash\{a\})$$

B פורשת ולכן $Span(B) = V$, כלומר מתקיים:

$$V \subseteq Span(A\backslash\{a\})$$

הכיוון השני של ההכלה ברור, ולכן $V = Span(A\backslash\{a\})$, כלומר $A\backslash\{a\}$ פורשת.

בפרט מתקיים $a \in Span(A\backslash\{a\})$, ולכן $A\backslash\{a\} \cup \{a\} = A$ ת"ל, בסתירה!

■

משפט: קבוצה בת"ל מקסימלית היא בסיס.

הוכחה: יהי V מרחב וקטורי ותהי $B \subseteq V$ בת"ל מקסימלית. צ.ל: $Span(B) = V$.

יהי $v \in V \backslash B$. הקבוצה $B \cup \{v\}$ היא ת"ל כי B בת"ל מקסימלית.

לכן $v \in Span(B)$, ומכאן ש-$V \subseteq Span(B)$.

ההכלה בכיוון השני ברורה, ולכן $Span(B) = V$.

B היא בת"ל ופורשת ולכן בסיס.

■

משפט: קבוצה פורשת מינימלית היא בסיס.

הוכחה: יהי V מרחב וקטורי ותהי $B \subseteq V$ פורשת מינימלית. צ.ל: B בת"ל.

נניח בשלילה ש-B ת"ל. זאת אומרת שקיים $b \in B$ כך ש-$b \in Span(B\backslash\{b\})$.

מתקיים $B\backslash\{b\} \subseteq Span(B\backslash\{b\})$ ולכן בסך הכל $B \subseteq Span(B\backslash\{b\})$.

$Span(B)$ הוא תת המרחב הקטן ביותר המכיל את B, ולכן:

$$Span(B) \subseteq Span(B\backslash\{b\})$$

B פורשת, ולכן $Span(B) = V$. מכאן ש-$V \subseteq Span(B\backslash\{b\})$ ולכן בהכרח מתקיים:

$$Span(B\backslash\{b\}) = V$$

בסתירה לכך ש-B פורשת מינימלית.

לכן B בת"ל וכן פורשת, ומכאן שהיא בסיס.

■

משפט השלישי חינם: יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$, $B \subset V$.

אם מתקיימים שניים מתוך התנאים הבאים אזי מתקיים גם התנאי השלישי ו-B בסיס.

1. $|B| = dimV$
2. B פורשת את V, כלומר $Span(B) = V$.
3. B בת"ל.

הוכחה: $2 + 3 \Rightarrow 1$: $Span(B) = V$ ולכן $dimV \leq |B|$.

B בת"ל ולכן $dimV \geq |B|$ (שהרי בת"ל מקסימלית היא בסיס).

מכאן שבסך הכל $|B| = dimV$ כנדרש.

$1 + 3 \Rightarrow 2$: נתון ש-B בת"ל, נוכיח שהיא בת"ל מקסימלית.

נניח בשלילה ש-B אינה בת"ל מקסימלית. לכן קיימת $B_1 \supsetneq B$ כך ש-B_1 בת"ל מקסימלית.

מההכלה ממש נובע ש-$|B_1| > |B|$.

על פי הנתון $|B| = dimV$ ולכן $|B_1| > dimV$.

B_1 בת"ל מקסימלית ולכן בסיס ל-V, כלומר $|B_1| = dimV$ בסתירה!

לכן B בת"ל מקסימלית, ומכאן שהיא פורשת את V וכן בסיס.

$1 + 2 \Rightarrow 3$: נתון ש-B פורשת, מספיק להראות ש-B פורשת מינימלית.

נניח בשלילה ש-B אינה פורשת מינימלית.

לכן קיימת $B_1 \subsetneq B$ כך ש-$Span(B_1) = Span(B)$.

מההכלה ממש אנו יודעים ש-$|B_1| < |B|$, כמו כן נתון ש-$|B| = dimV$,

ולכן בסך הכל $|B_1| < dimV$. B_1 בסיס ולכן זוהי סתירה!

לכן B פורשת מינימלית, ומכאן שהיא בת"ל וכן בסיס.

■

<u>משפט יחידות ההצגה לפי בסיס:</u> יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$, $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ בסיס ל-V .

אזי, לכל $v\in V$ קיימת <u>הצגה יחידה</u>, כלומר דרך אחת ויחידה לבחור סקלרים

$$\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{F}$$

כך ש-$v=\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_nv_n$.

<u>הוכחה:</u> נניח שקיימות שתי הצגות לאותו וקטור $v\in V$. כלומר קיימים סקלרים $\alpha_i,\beta_i\in\mathbb{F}$ כך שמתקיים:

$$v=\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_nv_n$$

$$v=\beta_1v_1+\cdots+\beta_nv_n$$

לכן:

$$\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_nv_n=\beta_1v_1+\cdots+\beta_nv_n$$

$$(\alpha_1-\beta_1)v_1+\cdots+(\alpha_n-\beta_n)v_n=\vec{0}$$

$\{v_1,\dots,v_n\}$ בסיס ובפרט בת"ל, ולכן:

$$\alpha_1-\beta_1=\vec{0}$$

$$\vdots$$

$$\alpha_n-\beta_n=\vec{0}$$

כלומר:

$$\alpha_1=\beta_1$$

$$\vdots$$

$$\alpha_n=\beta_n$$

ומכאן שקיימת הצגה אחת ויחידה לפי בסיס כנדרש.

■

<u>משפט המימדים:</u> יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, וכן $U,W \leq V$ תתי-מרחבים, אזי מתקיים:

$$\dim(U+W) = dimU + dimW - dimU \cap W$$

<u>הוכחה:</u> נניח $B_0 = \{v_1, \dots, v_k\}$ בסיס עבור $U \cap W$, לכן $dimU \cap W = k$. בפרט B_0 בת"ל.

$B_0 \subseteq U$, ולכן נוכל להשלים את B_0 לבסיס ל-U :

$$B_1 = B_0 \cup \{u_1, \dots, u_t\}$$

$$dimU = k + t$$

$B_0 \subseteq W$, ולכן נוכל להשלים את B_0 לבסיס ל-W :

$$B_2 = B_0 \cup \{w_1, \dots, w_r\}$$

$$dimW = k + r$$

נגדיר $B = B_1 \cup B_2$.

מתקיים $|B| = |B_1| + |B_2| - |B_0|$.

כעת מספיק להוכיח ש-B בסיס של $U + W$. כמובן $B \subseteq U + W$.

<u>נוכיח ש-B פורשת את $U + W$:</u>

$$SpanB = Span(B_1 \cup B_2) = SpanB_1 + SpanB_2$$

אבל ידוע ש-$SpanB_1 = U$ וכן $SpanB_2 = W$, ולכן $SpanB = U + W$.

<u>נוכיח ש-B בת"ל:</u>

יהא $\underbrace{\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k}_{v \in U \cap W} + \underbrace{\beta_1 u_1 + \cdots + \beta_t u_t}_{u \in U} + \underbrace{\gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_r w_r}_{w \in W} = \vec{0}$ צירוף לינארי ב-B השווה לאפס. נוכיח שכל הסקלרים הם אפס.

מתקיים:

$$v + u + w = \vec{0}$$

$$\underbrace{w}_{\in W} = - \underbrace{v}_{\in U \cap W} - \underbrace{u}_{\in U}$$

ולכן $w \in U \cap W$, כלומר ניתן להביע אותו על ידי צירוף לינארי של $B_0 = \{v_1, \dots, v_k\}$:

$$w = \delta_1 v_1 + \cdots + \delta_k v_k$$

נציב זאת בצירוף הלינארי לעיל ונקבל ש:

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_t u_t + \delta_1 v_1 + \cdots + \delta_k v_k = \vec{0}$$

$$\left(\alpha_1+\delta_1\right)v_1+\cdots+(\alpha_k+\delta_k)v_k+\beta_1u_1+\cdots+\beta_tu_t=\vec{0}$$

קיבלנו צירוף לינארי של כל הוקטורים ב-B_1 שהוא בסיס של U ובפרט בת"ל.

לכן $\beta_1=\cdots=\beta_t=0$.

נציב זאת חזרה בצירוף הכללי ונקבל ש:

$$\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_kv_k+\gamma_1w_1+\cdots+\gamma_rw_r=\vec{0}$$

זהו צירוף לינארי של הוקטורים ב-B_2 שהוא בסיס של W ובפרט בת"ל.

לכן:

$$\alpha_1=\cdots=\alpha_k=0$$

$$\gamma_1=\cdots=\gamma_r=0$$

ומכאן ש-B בת"ל כנדרש.

$$\Downarrow$$

בסך הכל הראינו ש-B בת"ל ופורשת את $U+W$, ולכן היא בסיס על פי ההגדרה.

כמו כן הראינו שמתקיים $|B|=|B_1|+|B_2|-|B_0|$ כאשר B_1 בסיס של U, B_2 בסיס של W וכן B_0 בסיס של $U\cap W$.

לכן בסך הכל מתקיים:

$$\dim(U+W)=dimU+dimW-dimU\cap W$$

כנדרש.

■

<u>משפט:</u> תהא $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, אזי A הפיכה משמאל (או מימין) אם ורק אם A הפיכה.

<u>הוכחה:</u> נגדיר $T: \mathbb{F}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{F}^{n\times n}$ על ידי $T(X) = AX$ עבור $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ הפיכה משמאל כלשהי.

מתקיים:

$$T(X + \alpha Y) = A(X + \alpha Y) = AX + \alpha AY = T(X) + \alpha T(Y)$$

ולכן זו העתקה לינארית. נראה כעת שהיא איזומורפיזם.

<u>חח"ע:</u>

נניח $T(B) = T(C)$. <u>צ.ל:</u> $B = C$.

מהנתון נובע ש-$AB = AC$.

A הפיכה משמאל ולכן קיימת $M \in \mathbb{F}^{n\times n}$ כך ש-$MA = I$.

נכפיל בהופכית משמאל ונקבל:

$$M(AB) = M(AC)$$

$$(MA)B = (MA)C$$

$$IB = IC$$

$$B = C$$

כנדרש.

<u>על:</u>

על פי משפט הדרגה מתקיים:

$$dimKer(T) + dimIm(T) = dimV$$

T חח"ע ולכן $Ker(T) = \{\vec{0}\}$, כלומר $dimKer(T) = 0$.

מכאן ש-$dimIm(T) = dim\mathbb{F}^{n\times n}$ וכן $Im(T) \subseteq \mathbb{F}^{n\times n}$, ולכן לפי משפט $Im(T) = \mathbb{F}^{n\times n}$.

לכן T על.

$$\Downarrow$$

T חח"ע ועל ולכן איזומורפיזם. לכן קיימת $Q \in \mathbb{F}^{n\times n}$ יחידה כך ש-$T(Q) = AQ = I$.

קיימת כי T על, יחידה כי T חח"ע. לכן T הפיכה גם מימין.

כמו כן מתקיים:

$$M = MI = M(AQ) = (MA)Q = IQ = Q$$

■

הוכחה נוספת: תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ כך שקיימת $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ המקיימת $AB = I$.

נוכיח שב-A אין שורת אפסים:

נניח בשלילה שיש ב-A שורת אפסים, לכן קיים i כך ש-$e_iA = \vec{0}$ לפי כפל שורה-שורה.

לכן:

$$AB = I$$

$$e_i(AB) = e_iI$$

$$(e_iA)B = e_iI$$

$$\vec{0} \cdot B = e_iI$$

$$\vec{0} = e_iI$$

בסתירה.

נוכיח שב-$CF(A)$ אין שורת אפסים:

נניח בשלילה שיש שורת אפסים ב-$CF(A)$.

כל מטריצה ניתנת לדירוג למטריצה מדורגת קנונית, ולכן קיימות מטריצות אלמנטריות

$E_1, \dots, E_k$ כך ש-$E_k \cdot \ldots \cdot E_1A = CF(A)$.

המטריצה $E_k \cdot \ldots \cdot E_1$ הפיכה (שהרי $E_1{}^{-1} \cdot \ldots \cdot E_k{}^{-1}$ ההופכית שלה), ולכן בעצם קיימת

P הפיכה כך ש-$PA = CF(A)$.

$$P = PI = P(AB) = (PA)B = CF(A)B$$

P הפיכה ולכן קיימת P^{-1} כך ש-$PP^{-1} = I$.

לכן:

$$\underbrace{I}_{There\ is\ not\ a\ row\ of\ zero's} = PP^{-1} = (CF(A)B)P^{-1} = \underbrace{CF(A)(BP^{-1})}_{\substack{There\ is\ a\ row\ of\ zero's \\ because\ CF(A)\ has\ one}}$$

בסתירה!

A ריבועית ולכן $CF(A) = I$ (אחרת תהיה בה שורת אפסים בסתירה למה שהוכחנו).

לכן קיימת P הפיכה כך ש-$PA = CF(A) = I$ כפי שהוכחנו.

מתקיים:

$$P = PI = P(AB) = (PA)B = IB = B$$

כלומר $P = B$.

לכן הוכחנו שמתקיים $AB = I$ וכן $BA = I$, כלומר A הפיכה כנדרש.

■

<u>משפט:</u> תהי $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ מטריצה, אזי דרגת השורות של A שווה לדרגת העמודות של A.

<u>הוכחה:</u> תהא $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$. נסמן $k = r_C(A)$ ונניח ש-$B = \{b_1, \dots, b_k\}$ הוא בסיס למרחב העמודות של A .

כלומר לכל $1 \le i \le n$ קיים $d_i \in \mathbb{F}^k$ כך ש:

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ b_1 & \cdots & b_k \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} d_1 = C_1(A)$$

נסמן $G = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ b_1 & \cdots & b_k \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$. נשים לב שמתקיים:

$$G \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ d_1 & \cdots & d_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ C_1(A) & \cdots & C_n(A) \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{G}_{m\times k} \underbrace{D}_{k\times n} = \underbrace{A}_{m\times n}$$

למטריצה D יש k שורות ולכן $r_R(D) \le k$.

מכפל שורה-שורה:

השורות של A הן צירוף לינארי של השורות של D.

לכן $r_R(A) \le r_R(D) \le k$, כלומר $r_R(A) \le r_C(A)$.

בצורה זהה מתקיים עבור A^t:

$$r_R(A^t) \le r_C(A^t)$$

אבל $r_R(A^t) = r_C(A)$ וכן $r_C(A^t) = r_R(A)$, ולכן:

$$r_C(A) \le r_\mathrm{R}(A)$$

$$\Downarrow$$

מכאן שבסך הכל:

$$r_C(A) = r_\mathrm{R}(A)$$

כנדרש.

■

<u>משפט השקולים:</u> תהא $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, אזי הבאים שקולים:

1. A הפיכה.
2. לכל $b \in \mathbb{F}^n$ למערכת $Ax=b$ יש פתרון יחיד.
3. קיים $b \in \mathbb{F}^n$ כך שלמערכת $Ax=b$ יש פתרון יחיד.
4. למערכת ההומוגנית $Ax=\vec{0}$ יש פתרון טריוויאלי בלבד.
5. עמודות A בת"ל.
6. $rank(A)=n$.
7. שורות A בת"ל.

<u>הוכחה:</u> <u>$1 \Longrightarrow 2$:</u> $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ הפיכה, ולכן קיימת $A^{-1} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ כך ש-$A^{-1}A=I$.

לכן אם $Ax=b$, אזי:

$$A^{-1}Ax=A^{-1}b$$

$$Ix=A^{-1}b$$

$$x=A^{-1}b$$

כלומר לכל $b \in \mathbb{F}^n$ למערכת $Ax=b$ יש פתרון יחיד כנדרש.

<u>$2 \Longrightarrow 3$:</u> לכל $b \in \mathbb{F}^n$ למערכת $Ax=b$ יש פתרון יחיד,

בפרט קיים $b \in \mathbb{F}^n$ כך שלמערכת $Ax=b$ יש פתרון יחיד כנדרש.

<u>$3 \Longrightarrow 4$:</u> נניח בשלילה שלמערכת ההומוגנית $Ax=\vec{0}$ יש יותר מפתרון אחד (הטריוויאלי).

לפי משפט, ידוע שפתרון של המערכת הלא הומוגנית שווה לפתרון מסוים של המערכת הלא הומוגנית + פתרון של המערכת ההומוגנית.

לכן אם למערכת ההומוגנית יש יותר מפתרון אחד, אזי גם למערכת הלא הומוגנית יש יותר מפתרון אחד, בסתירה לנתון!

<u>$4 \Longrightarrow 5$:</u> נסמן $A=\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ C_1(A) & \cdots & C_n(A) \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$. לכן:

$$Ax=\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ C_1(A) & \cdots & C_n(A) \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=x_1C_1(A)+\cdots+x_nC_n(A)=\vec{0}$$

נתון שלמערכת ההומוגנית פתרון טריוויאלי בלבד, ולכן בהכרח $x_1=\cdots=x_n=0$,

כלומר עמודות A בת"ל לפי ההגדרה כנדרש.

5 $\Leftarrow$ 6 : עמודות A בת"ל, וכן הן פורשות את מרחב העמודות, ולכן הן בסיס למרחב זה.

לכן מתקיים:

$$r_C(A) = n$$

מכאן שגם:

$$rank(A) = n$$

6 $\Leftarrow$ 7 : $r_R(A) = rank(A) = n$ זאת אומרת שמימד מרחב השורות הוא n.

ישנן n שורות במטריצה A, ולכן הן בהכרח בת"ל לפי השלישי חינם.

7 $\Leftarrow$ 1 : אם השורות של A בת"ל וכן יש לנו n שורות ולכן לפי השלישי חינם הן בסיס

ל-$\mathbb{F}^n$. לכן לכל $e_i \in \mathbb{F}^n$ קיים וקטור שורה r_i כך ש-$r_i A = e_i$, שהרי לפי

כפל שורה-שורה זהו בדיוק צירוף לינארי של השורות.

נסמן $C = \begin{pmatrix} -r_1- \\ \vdots \\ -r_n- \end{pmatrix}$. מתקיים:

$$CA = \begin{pmatrix} -r_1- \\ \vdots \\ -r_n- \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} -r_1A- \\ \vdots \\ -r_nA- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e_1- \\ \vdots \\ -e_n- \end{pmatrix} = I$$

לכן A הפיכה משמאל, ומכאן שלפי משפט A הפיכה גם מימין ובסך הכל הפיכה.

■

משפט ההגדרה של העתקה לינארית: יהיו V,W מרחבים וקטורים מעל שדה $\mathbb{F}$.

יהי $B=\{b_1,\dots,b_n\}$ בסיס ל-V.

יהיו $w_1,\dots,w_n\in W$ וקטורים כלשהם, אזי קיימת העתקה יחידה

$T: V \longrightarrow W$

המקיימת $T(b_i)=w_i$ לכל $1\le i\le n$.

הוכחה: נגדיר $T: V \longrightarrow W$ בצורה הבאה:

יהי $v\in V$. B בסיס, ולכן קיימים $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{F}$ כך ש-$v=\alpha_1 b_1+\dots+\alpha_n b_n$.

נגדיר:

$$T(v)=\alpha_1 w_1+\dots+\alpha_n w_n$$

נראה שזו העתקה לינארית:

$v_1,v_2\in V$, ולכן לכל אחד מהם יש הצגה לפי בסיס B:

$$v_1=\gamma_1 b_1+\dots+\gamma_n b_n$$

$$v_2=\delta_1 b_1+\dots+\delta_n b_n$$

לכן:

$$v_1+\beta v_2=(\gamma_1+\beta\delta_1)b_1+\dots+(\gamma_n+\beta\delta_n)b_n$$

לפי הגדרת ההעתקה:

$$T(v_1+\beta v_2)=(\gamma_1+\beta\delta_1)w_1+\dots+(\gamma_n+\beta\delta_n)w_n=$$
$$=\gamma_1 w_1+\dots+\gamma_n w_n+\beta(\delta_1 w_1+\dots+\delta_n w_n)=T(v_1)+\beta T(v_2)$$

כנדרש, ולכן קיימת כזו העתקה.

נוכיח יחידות:

נניח שקיימת $S: V \longrightarrow W$ המקיימת $S(b_i)=w_i$ לכל $1\le i\le n$.

יהי $v=\alpha_1 b_1+\dots+\alpha_n b_n\in V$. לכן:

$$S(v)=S(\alpha_1 b_1+\dots+\alpha_n b_n)=\alpha_1 S(b_1)+\dots+\alpha_n S(b_n)=$$
$$=\alpha_1 T(b_1)+\dots+\alpha_n T(b_n)=T(\alpha_1 b_1+\dots+\alpha_n b_n)=T(v)$$

מכאן ש-$T=S$, ולכן T- יחידה.

■

משפט: T חח"ע אם ורק אם $KerT = \{\vec{0}\}$.

הוכחה: $\Leftarrow$ נניח T חח"ע. תמיד מתקיים $T\left(\vec{0}\right) = \vec{0}$ ולכן $\{\vec{0}\} \subseteq KerT$.

יהא $v \in KerT$, לכן לפי ההגדרה $T(v) = \vec{0} = T\left(\vec{0}\right)$ ובגלל ש-T חח"ע מתקיים $v = \vec{0}$, כלומר $KerT \subseteq \{\vec{0}\}$.

לכן בסך הכל $KerT = \{\vec{0}\}$.

$\Longrightarrow$ נתון $KerT = \{\vec{0}\}$.

נניח ש-$T(v) = T(u)$ ונוכיח ש-$v = u$.

$T(v) = T(u)$ ולכן $T(v) - T(u) = \vec{0}$.

לפי תכונות של העתקות לינאריות מתקיים $T(v-u) = \vec{0}$,

ומכאן שעל פי הנתון חייב להתקיים $v - u = \vec{0}$, כלומר $v = u$

■

<u>משפט הדרגה של העתקה לינארית:</u> תהי $T: V \longrightarrow W$ העתקה לינארית, אזי

$$dimKer(T) + dimIm(T) = dimV$$

<u>הוכחה:</u> יהיו $\{v_1, \dots, v_k\} \subseteq V$ בסיס לגרעין של T, ו-$\{T(u_1), \dots, T(u_l)\} \subseteq W$ בסיס לתמונה.

נוכיח ש-$\{v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_l\}$ בת"ל.

יהא $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_l u_l = \vec{0}$ צירוף לינארי.

נפעיל את T ונקבל ש:

$$T(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_l u_l) = T(\vec{0})$$

$$\alpha_1 T(v_1) + \cdots + \alpha_k T(v_k) + \beta_1 T(u_1) + \cdots + \beta_l T(u_l) = \vec{0}$$

$v_1, \dots, v_k \in KerT$ ולכן מתקיים:

$$\beta_1 T(u_1) + \cdots + \beta_l T(u_l) = \vec{0}$$

אבל $\{T(u_1), \dots, T(u_l)\}$ בסיס לתמונה ובפרט בת"ל, ולכן $\beta_1 = \cdots = \beta_l = 0$.

לכן קיבלנו ש:

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = \vec{0}$$

אבל גם $\{v_1, \dots, v_k\}$ בסיס לגרעין ובפרט בת"ל, ולכן $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$.

קיבלנו שכל הסקלרים שווים לאפס, ולכן $\{v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_l\}$ בת"ל.

נוכיח שהקבוצה $\{v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_l\}$ פורשת את V.

לכל $v \in V$ קיימים סקלרים $\alpha_1, \dots, \alpha_l \in \mathbb{F}$ כך ש-$T(v) = \alpha_1 T(u_1) + \cdots + \alpha_l T(u_l)$ שהרי $\{T(u_1), \dots, T(u_l)\}$ בסיס לתמונה.

לכן:

$$T\left(\underbrace{v - \alpha_1 u_1 - \cdots - \alpha_l u_l}_{\in KerT}\right) = \vec{0}$$

ומכאן שקיימים סקלרים $\beta_1, \dots, \beta_k \in \mathbb{F}$ כך ש-$v - \alpha_1 u_1 - \cdots - \alpha_l u_l = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_k v_k$.

לכן מתקיים:

$$v = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_l u_l + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_k v_k$$

כלומר ניתן להציג כל $v \in V$ על ידי צירוף לינארי של $\{v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_l\}$ ולכן קבוצה זו פורשת את V.

בסך הכל הקבוצה $\{\underbrace{v_1, \dots, v_k}_{dimKer(T)}, \underbrace{u_1, \dots, u_l}_{dimIm(T)}\}$ בת"ל ופורשת את V, ולכן מהווה בסיס ל-V .

מכאן ש:

$$dimKer(T) + dimIm(T) = dimV$$

כנדרש.

■

משפט: $V \cong W$ אם ורק אם $dimV = dimW$.

הוכחה: $\Leftarrow$ נתון $V \cong W$, ולכן קיימת $T: V \longrightarrow W$ חח"ע ועל.

T חח"ע ולכן $Ker(T) = \{\vec{0}\}$. מכאן ש-$dimKer(T) = 0$.

T על ולכן $Im(T) = W$. מכאן ש-$dimIm(T) = dimW$.

לכן לפי משפט הדרגה מתקיים:

$$dimKer(T) + dimIm(T) = dimV$$

$$0 + dimW = dimV$$

$$dimW = dimV$$

כנדרש.

$\Longrightarrow$ נתון $dimV = dimW$. נניח $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס ל-V, וכן $C = \{w_1, \dots, w_n\}$ בסיס ל-W.

נגדיר $T: V \longrightarrow W$ על ידי $T(v_i) = w_i$.

נוכיח ש-T על:

יהא $w \in W$. לכן קיימים סקלרים $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ כך ש-$w = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n$.

ניקח $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$.

מתקיים:

$$T(v) = T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 T(v_1) + \dots + \alpha_n T(v_n) =$$
$$= \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n = w$$

ולכן T על.

נוכיח ש-T חח"ע:

על פי משפט הדרגה מתקיים:

$$dimKer(T) + dimIm(T) = dimV$$

T על ולכן $dimV \underbrace{=}_{Given} dimW = dimIm(T)$, כלומר מתקיים:

$dimKer(T) = 0$, ולכן $KerT = \{\vec{0}\}$ ו-T חח"ע.

$T: V \longrightarrow W$ חח"ע ועל ולכן איזומורפיזם, כלומר $V \cong W$ כנדרש.

■

__משפט:__ תהי $T: V \longrightarrow W$ העתקה לינארית, E בסיס ל-V, F בסיס ל-W, אזי $rank(T) = rank([T]_F^E)$.

__הוכחה:__ יהיו $\{v_1, \dots, v_k\} \subseteq V$ בסיס לגרעין של T, ו-$\{T(u_1), \dots, T(u_l)\} \subseteq W$ בסיס לתמונה.

נוכיח ש-$E = \{v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_l\}$ הוא בסיס ל-V.

נוכיח ש-$\{v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_l\}$ בת"ל.

יהא $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_l u_l = \vec{0}$ צירוף לינארי.

נפעיל את T ונקבל ש:

$$T(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_l u_l) = T(\vec{0})$$

$$\alpha_1 T(v_1) + \cdots + \alpha_k T(v_k) + \beta_1 T(u_1) + \cdots + \beta_l T(u_l) = \vec{0}$$

$v_1, \dots, v_k \in KerT$ ולכן מתקיים:

$$\beta_1 T(u_1) + \cdots + \beta_l T(u_l) = \vec{0}$$

אבל $\{T(u_1), \dots, T(u_l)\}$ בסיס לתמונה ובפרט בת"ל, ולכן $\beta_1 = \cdots = \beta_l = 0$.

לכן קיבלנו ש:

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = \vec{0}$$

אבל גם $\{v_1, \dots, v_k\}$ בסיס לגרעין ובפרט בת"ל, ולכן $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$.

קיבלנו שכל הסקלרים שווים לאפס, ולכן $\{v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_l\}$ בת"ל.

נוכיח שהקבוצה $\{v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_l\}$ פורשת את V.

לכל $v \in V$ קיימים סקלרים $\alpha_1, \dots, \alpha_l \in \mathbb{F}$ כך ש-$T(v) = \alpha_1 T(u_1) + \cdots + \alpha_l T(u_l)$ שהרי $\{T(u_1), \dots, T(u_l)\}$ בסיס לתמונה.

לכן:

$$T\left(\underbrace{v - \alpha_1 u_1 - \cdots - \alpha_l u_l}_{\in KerT}\right) = \vec{0}$$

ומכאן שקיימים סקלרים $\beta_1, \dots, \beta_k \in \mathbb{F}$ כך ש-$v - \alpha_1 u_1 - \cdots - \alpha_l u_l = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_k v_k$.

לכן מתקיים:

$$v = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_l u_l + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_k v_k$$

כלומר ניתן להציג כל $v \in V$ על ידי צירוף לינארי של $\{v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_l\}$ ולכן קבוצה זו פורשת את V.

בסך הכל הקבוצה $E = \{v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_l\}$- בת"ל ופורשת את V, ולכן מהווה בסיס ל-V .

כעת מתקיים:

$$[T]_F^E = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ [T(v_1)]_F & \cdots & [T(v_k)]_F & , & [T(u_1)]_F & \cdots & [T(u_l)]_F \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}.$$

ידוע לנו ש- $\{v_1, ..., v_k\} \in \ker T$, כלומר $T(v_1) = \cdots = T(v_k) = \vec{0}$ ולכן גם
$$[T(v_1)]_F = \cdots = [T(v_k)]_F = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

בנוסף, ידוע ש- $\{T(u_1), ..., T(u_l)\}$ הם בסיס ל $\operatorname{Im} T$, בפרט בת"ל, לכן נקבל :

$$[T]_F^E = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ [T(v_1)]_F & \cdots & [T(v_k)]_F & [T(u_1)]_F & \cdots & [T(u_l)]_F \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \end{matrix}}_{\substack{k \text{ coloumns} \\ \text{of zero}}} & \underbrace{\begin{matrix} \vdots & & \vdots \\ [T(u_1)]_F & \cdots & [T(u_l)]_F \\ \vdots & & \vdots \end{matrix}}_{\textit{Linearly} \text{ independent}} \end{pmatrix}$$

לכן נקבל ש- $rank[T]_F^E = l$, כלומר $rank(T) = rank([T]_F^E)$ שהרי
$rank(T) = dimIm(T) = l$

נוכיח כעת מוגדרות היטב.

יהיו F_2, E_2 בסיסים נוספים של V ו-W בהתאמה.

מתקיים:

$$[T]_{F_2}^{E_2} = [I]_{F_2}^F [T]_F^E [I]_E^{E_2}.$$

כמו כן, לפי משפט, אם A הפיכה אזי $rank(AB) = rank(B)$.

לכן, $rank\left([T]_F^E\right) = rank\left([T]_F^E [I]_E^{E_2}\right)$ שהרי $[I]_E^{E_2}$ היא הפיכה.

באותו אופן, מתקיים:

$$rank\left([I]_{F_2}^{F}[T]_{F}^{E}[I]_{E}^{E_2}\right)=rank\left([T]_{F}^{E}[I]_{E}^{E_2}\right)$$

שהרי $[I]_{F_2}^{F}$ היא הפיכה.

בסה"כ קיבלנו ש $rank\left([T]_{F}^{E}\right)=rank\left([I]_{F_2}^{F}[T]_{F}^{E}[I]_{E}^{E_2}\right)$.

אבל הרי $[T]_{F_2}^{E_2}=[I]_{F_2}^{F}[T]_{F}^{E}[I]_{E}^{E_2}$, ולכן $rank\left([T]_{F_2}^{E_2}\right)=rank\left([T]_{F}^{E}\right)$ כנדרש.

■