פתרון הבוחן

30 בדצמבר 2015

כמעט כל הסעיפים נלקחו מהתרגולים והתרגילים (כולם נמצאים בקובץ תרגולים חלק א').

פתרון שאלה 3 סעיף ב':

הנגזרות החלקיות רציפות בנקודה M_0 ולכן הפונקציה דיפרנציאבילית בנקודה M_0.

ננרמל את וקטור הכיוון:

$$\vec{h}=\frac{(2,1,-2)}{\|(2,1,-2)\|}=\frac{(2,1,-2)}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$$

כמו כן,

$$\nabla f\left(M_0\right)=\left(f_x\left(M_0\right),f_y\left(M_0\right),f_z\left(M_0\right)\right)=\left(1,-2,f_z\left(M_0\right)\right)$$

מכיוון שהפונקציה דיפרנציאבילית, אפשר להביע את הנגזרת הכיוונית על ידי:

$$-1=D_{\vec{h}}f\left(M_0\right)=\nabla f\left(M_0\right)\cdot\vec{h}=1\cdot\frac{2}{3}-2\cdot\frac{1}{3}-\frac{2}{3}f_z\left(M_0\right)$$

ולכן $f_z\left(M_0\right)=\frac{3}{2}$, כלומר:

$$\nabla f\left(M_0\right)=\left(1,-2,\frac{3}{2}\right)$$

פתרון הבונוס:

פורמלית - נציג את קווי הגובה כמסילות $\gamma(t) = (x(t), y(t))$:

$$f(x(t), y(t)) = C$$

נגזור לפי t את שני האגפים, ומכלל השרשרת נקבל:

$$\frac{df}{dt} = \frac{d}{dt}C$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = 0$$

$$\nabla f \cdot \gamma'(t) = 0$$

כלומר הגרדיאנט ניצב למשיק למסילה, ובמילים אחרות - ניצב לקווי הגובה.

מישהו אחד פתר כך וכל הכבוד לו. אני הסתפקתי בהסבר גיאומטרי משכנע - בעזרת נגזרת כיוונית, חיתוך עם מישור וכדומה. מי שהסביר כך קיבל את מלוא הנקודות.

מי שניסה משהו קיבל נקודה לפחות על המאמץ.