תרגיל #3

להגשה עד השיעור האחרון של הסמסטר

פירוק SVD (SVD=singular value decompodition) (הכללה של פירוק א"ג)

המטרה של תרגיל זה הוא היכרות עם פירוק SVD. מה זה?
בהינתן מטריצה ממשית $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ רוצים למצוא V, U 2 מטריצות א"ג (כלומר $V^tV = I$ וגם $U^tU = I$), Σ בגודל של A כך $U^tAV = \Sigma$ (כאשר Σ היא מטריצה "כמעט אלכסונית", היא מקיימת $\Sigma_{i,j} = 0$ לכל $i \neq j$).

חלק א

1. טענה: תהא $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ הוכיחו כי $N(A^tA) = N(A)$. (או $N(AA^t) = N(A^t)$ ע"י החלפה $A \rightleftarrows A^t$). [רמז: $||Ax||^2 = (Ax)^tAx$]
פתרון: הוכחה: $(\supset)$ יהא $x \in N(A)$ אזי $Ax = 0 \Leftarrow A^tAx = 0 \Leftarrow x \in N(A^tA)$
$(\subset)$יהא $x \in N(A^tA) \Leftarrow A^tAx = 0 \Leftarrow x^tA^tAx = 0$
$\Leftarrow ||Ax||^2 =< Ax, Ax >= (Ax)^tAx = x^tA^tAx = 0 \Leftarrow Ax = 0 \Leftarrow x \in N(A)$
$\blacksquare$.

2. השתמשו בסעיף הקודם להסיק כי $R(A^tA) = R(A)$ (ואז $R(AA^t) = R(A^t)$ באופן דומה)
פתרון: הוכחה: $N(A^tA) = N(A) \Leftarrow R(A^tA) = N(A^tA)^\perp = N(A)^\perp = R(A)$

3. מסקנה $rank(A^tA) = rank(A) = rank(A^t) = rank(AA^t)$

4. תהא $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ אזי $A^tA \in \mathbb{R}^{n \times n}$ סימטרית ולכן לכסינה א"ג. הוכיחו כי הע"ע $\lambda_1 \dots, \lambda_n$ של A^tA הם אי שליליים. כלומר לכל i מתקיים $0 \leq \lambda_i$. הדרכה: העיזר בחישוב של $v^t \left(A^tA\right) v$ כאשר v ו"ע.
פתרון: יהא v ו"ע של $\lambda = \lambda_i$ אזי מתקיים $A^tAv = \lambda v$ נכפול את שני האגפים ב v^t ונקבל כי

$$v^tA^tAv = v^t\lambda v$$

שזה

$$\langle Av, Av \rangle = \lambda \langle v, v \rangle$$

כיוון ש $v \neq 0$ ניתן לחלק ולקבל

$$\lambda = \frac{||Av||^2}{||v||^2} \geq 0$$

5. הוכיחו כי קיים בסיס א"נ של ו"ע $\{v_1,\dots,v_r,v_{r+1},\dots v_n\}$ של A^tA כך ש

(א) $\{v_{r+1},\dots v_n\}$ מתאימים לע"ע 0 והם בסיס ל $N(A)$

(ב) $\{v_1\dots,v_r\}$ מתאימים לא מתאימים לע"ע 0 והם בסיס ל $R(A)$.

פתרון: A^tA לכסינה ולכן יש לה ו"ע $\{v_1,\dots,v_r,v_{r+1},\dots v_n\}$ שמהווים בסיס ל $\mathbb{R}^n$. נסמן את הו"ע המתאימים לע"ע 0 ב $\{v_{r+1},\dots v_n\}$ אזי כיוון ש $N(A^tA)$ הוא המרחב העצמי של 0 $\{v_{r+1},\dots v_n\}$ הם הבסיס לו. כיוון ש $R(A^tA)=N(A^tA)^\perp$ נקבל כי המימד שלו הוא r. כיוון שו"ע עצמיים של ע"ע שונים מאונכים זה לזה, נקבל כי לכל $1\le i\le r$ מתקיים כי v_i מאונך לכל $v_{r+1},\dots v_n$ ולכן $v_i\in R(A^tA)$ כיוון ש $\{v_1\dots,v_r\}$ בת"ל אז מהשלישי חינם נקבל כי הם בסיס ל $R(A^tA)$. מהסעיפים הקודמים ש $N(A)=N(A^tA),R(A)=R(A^tA)$ נקבל את המבוקש.

6. נסדר את הע"ע של A^tA מהגדול לקטן $\lambda_1\ge\lambda_2\dots\ge\lambda_n$ (וגם את הו"ע בהתאם). בפרט לכל $\lambda_i=0 : r+1\le i\le n$

7. נגדיר $\mu_i=\sqrt{\lambda_i}$ לכל $1\le i\le n$. עוד נגדיר לכל $1\le i\le r$ $u_i=\frac{Av_i}{\mu_i}$. הוכח כי $\{u_1,\dots,u_r\}$ בסיס א"נ ל $C(A)$.

פתרון: כיוון ש $\dim C(A)=\dim R(A)=r$ מספיק להראות כי $\{u_1,\dots,u_r\}$ קבוצה א"נ שמוכלת ב $C(A)$ (לפי השלישי חינם).

אכן לכל $1\le i,j\le r$ מתקיים כי

$$\langle u_i,u_j\rangle = \left\langle \frac{Av_i}{\mu_i},\frac{Av_j}{\mu_j}\right\rangle=\frac{1}{\mu_i\mu_j}\langle Av_i,Av_j\rangle=\frac{1}{\mu_i\mu_j}v_i^tA^tAv_j=\frac{1}{\mu_i\mu_j}v_i^t\lambda_jv_j=\frac{\lambda_j}{\mu_i\mu_j}v_i^tv_j$$

$$=\frac{\lambda_j}{\mu_i\mu_j}\langle v_i,v_j\rangle=\begin{cases}0 & \text{i}\neq\text{j}\\ \frac{\lambda_i}{\mu_i\mu_i}=1 & \text{i=j}\end{cases}$$

וברור כי לכל i מתקיים

$$\frac{Av_i}{\mu_i}=A\left(\frac{v_i}{\mu_i}\right)\in C(A)$$

8. נשלים לבסיס א"נ של $\mathbb{R}^m$ $\{u_1,\dots,u_r,u_{r+1},\dots,u_m\}$. הוכח כי הקבוצה $\{u_{r+1},\dots,u_m\}$ מהווה בסיס א"נ ל $N(A^t)$

פתרון: משיקולי ניצבות כיוון ש $C(A)^\perp=N(A^t)$ נקבל כי המימד הוא $\dim N(A^t)=m-r$. ובנוסף $\{u_1,\dots,u_r\}\subseteq N(A^t)$ ולכן בסיס.

חלק ב

נצרף את כל מה הדברים מחלק א

1. נגדיר $\Sigma = \begin{pmatrix} \mu_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \mu_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $U = (u_1 \dots u_m)$,
$V = (v_1 \dots v_n)$ (כיוון ש U, V א"נ $U^t = U^{-1}, V^t = V^{-1}$)

2. נשים לב ש $U^tAV = U^t(Av_1 \dots Av_n)$ ולכן עבור $1 \le i \le r$ נקבל כי

$$[U^tAV]_{ij} =< \frac{Av_i}{\mu_i}, Av_j >= \frac{1}{\mu_i} v_i^t A^t A v_j = \frac{1}{\mu_i} v_i^t \lambda_j v_j = \frac{1}{\mu_i} \lambda_j v_i^t v_j = \begin{cases} \frac{\lambda_i}{\mu_i} = \mu_i & i = j \\ 0 & i \ne j \end{cases}$$

ועבור $r + 1 \le i \le m$ נקבל כי

$$[U^tAV]_{ij} = \langle u_i, Av_j \rangle = u_i^t A v_j = \left(A^t u_i\right)^t v_j = 0^t v_j = 0$$

כלומר $U^tAV = \Sigma$

לסיכום

$A = U\Sigma V^t$ כאשר $V \in \mathbb{R}^{n\times n}, U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ 2 מטריצות א"ג $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n}$ בגודל של A ומתקיים.

1. $\{v_1, \dots, v_r\}$ בסיס א"נ ל $R(A)$
2. $\{v_{r+1}, \dots, v_n\}$ בסיס א"נ ל $N(A)$
3. $\{u_1, \dots, u_r\}$ בסיס א"נ ל $C(A)$
4. $\{u_{r+1}, \dots, u_m\}$ מהווה בסיס א"נ ל $N(A^t)$