פתרון תרגיל 4 חדו"א 2 תשע"ח

25 ביוני 2018

1. נסמן: $F(x,y) = \sin x + \sinh y + 1$. נתבונן בכל נקודה (x_0, y_0) המקיימת את המשוואה (למשל $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$).
הנגזרות החלקיות הן:

$$F_x = \cos x, F_y = \cosh y$$

ברור שהפונקציות F, F_x, F_y גזירות ברציפות.
נשים לב שמתקיים

$$F_y(x_0, y_0) = \frac{e^{y_0} + e^{-y_0}}{2} > 0$$

ובפרט $F_y \neq 0$ בנקודה.
לכן לפי המשפט קיימת סביבה (של הנקודה (x_0, y_0)) בה ניתן להציג את y כפונקציה של x.

2. נבדוק את תנאי המשפט בכל אחד מהמקרים.

(א) קל לראות שהפונקציות F, F_x, F_y, F_z גזירות ברציפות (אינסוף פעמים). הנגזרות הן:

$$F_x = y, F_y = 2y + x, F_z = 2z - e^z$$

ובנקודה, $F_z(0, e, 2) = 4 - e^2 \neq 0$, ולכן המשוואה מגדירה את z כפונקציה של x, y.
אם כך, בסביבת $(0, e)$מתקיים:

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{y}{e^z - 2z}, z_y = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{2y + x}{e^z - 2z}$$

לפיכך:

$$z_x(0, e) = \frac{e}{e^2 - 4}, z_y(0, e) = \frac{2e}{e^2 - 4}$$

כעת:

$$z_{yy}=\left(z_y\right)_y=\frac{2\left(e^z-2z\right)-\left(e^z-2\right)\cdot z_y\left(2y+x\right)}{\left(e^z-2z\right)^2}$$

ולכן:

$$z_{yy}\left(0,e\right)=\frac{2\left(e^2-4\right)-\left(e^2-4\right)\frac{2e}{e^2-4}\left(2e\right)}{\left(e^2-4\right)^2}=\frac{-2e^2-8}{\left(e^2-4\right)^2}$$

(ב) קל לראות שהפונקציות F,F_x,F_y,F_z גזירות ברציפות. הנגזרות הן:

$$F_x=z+2x,F_y=\ln z,F_z=x+\frac{y}{z}$$

ובנקודה, $F_z\left(-2,0,2\right)=-2\neq 0$. לכן המשוואה מגדירה את z כפונקציה של x,y.

אם כך, בסביבת $\left(-2,0\right)$ מתקיים:

$$z_x=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{z+2x}{x+\frac{y}{z}},z_y=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{\ln z}{x+\frac{y}{z}}$$

לפיכך:

$$z_x\left(-2,0\right)=-\frac{2-4}{-2}=-1,z_y\left(-2,0\right)=-\frac{\ln 2}{-2}=\frac{\ln 2}{2}$$

כעת:

$$z_{xy}=\left(z_x\right)_y=-\frac{z_y\left(x+\frac{y}{z}\right)-\left(\frac{z-yz_y}{z^2}\right)\left(z+2x\right)}{\left(x+\frac{y}{z}\right)^2}$$

ולכן:

$$z_{xy}\left(-2,0\right)=\frac{1-\ln 2}{4}$$

3. נסמן:

$$F\left(x,y,z\right)=\sqrt{x^2+y^5+\cos z-1}-1-z^4$$

נבדוק מהן הנגזרות:

$$F_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^5+\cos z-1}}$$

לכן:

$$F_x\left(-1,0,0\right)=\frac{-1}{\sqrt{\left(-1\right)^2+0^5+\cos 0-1}}=-1\neq 0$$

ולכן המשוואה מגדירה את x כפונקציה של z,y בסביבת הנקודה.

$$F_y=\frac{5y^4}{2\sqrt{x^2+y^5+\cos z-1}}$$

לכן:

$$F_y\left(-1,0,0\right)=\frac{0}{\cdots}=0$$

ואי־אפשר להשתמש במשפט הפונקציה הסתומה. אלא מאי? אפשר עם קצת אלגברה לחלץ מהמשוואה את y כפונקציה של x,z די בקלות:

$$y=\sqrt[5]{\left(z^4+1\right)^2-x^2-\cos z+1}$$

ולכן המשוואה אכן מגדירה את y כפונקציה של x,z בסביבת הנקודה.

$$F_z=\frac{-\sin z}{2\sqrt{x^2+y^5+\cos z-1}}-4z^3$$

לכן:

$$F_z\left(-1,0,0\right)=0$$

ואי־אפשר להשתמש במשפט הפונקציה הסתומה.
נשים לב לעובדה הבאה: אם $\left(-1-\varepsilon,0,\delta\right)$ פתרון של המשוואה, גם $\left(-1-\varepsilon,0,-\delta\right)$ פתרון של המשוואה, לכל $\varepsilon,\delta>0$.
כלומר, לכל סביבה (עם רדיוס δ) של הנקודה $\left(-1,0,0\right)$ קיים $\varepsilon>0$ וערכים z_1,z_2 עבורם $\left(-1-\varepsilon,0,z_1\right)$ ו־ $\left(-1-\varepsilon,0,z_2\right)$ נמצאות בסביבה ומתקיים:

$$F\left(-1-\varepsilon,0,z_1\right)=F\left(-1-\varepsilon,0,z_2\right)=0$$

ולכן המשוואה לא מגדירה את z כפונקציה של x,y בסביבת הנקודה.

4. נשווה את הגרידאנט ל־0:

$$\begin{cases} f_x=6x^2+y^2+10x=0 \\ f_y=2xy+2y=0 \end{cases}$$

מהמשוואה השנייה נקבל: $2y\left(x+1\right)=0$.
אם $x=-1$, מהמשוואה הראשונה נקבל: $y^2-4=0$, והנקודות הן: $(-1,\pm 2)$.

אם $y=0$, מהמשוואה השנייה נקבל $6x^2+10x=0$, והנקודות הן: $(0,0), \left(-\frac{5}{3},0\right)$.
מטריצת ההסיאן היא:

$$H_f=\begin{pmatrix} 12x+10 & 2y \\ 2y & 2x+2 \end{pmatrix}$$

נבדוק מה קורה בכל אחת מהנקודות:

$$H_f(-1,2)=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

שני המינורים שליליים ולכן זו נקודת אוכף.

$$H_f(-1,-2)=\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

שוב, שני המינורים שליליים ולכן זו נקודת אוכף.

$$H_f(0,0)=\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

שני הע"ע חיוביים ולכן זו נקודת מינימום.

$$H_f\left(-\frac{5}{3},0\right)=\begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

שני הע"ע שליליים ולכן זו נקודת מקסימום.

5. נשווה את הגרדיאנט ל־0:

$$\begin{cases} f_x=e^{-\left(x^2+y^2\right)}-2x(x+y)e^{-\left(x^2+y^2\right)}=0 \\ f_y=e^{-\left(x^2+y^2\right)}-2y(x+y)e^{-\left(x^2+y^2\right)}=0 \end{cases}$$

אחרי שנצמצם ב־$e^{-\left(x^2+y^2\right)}$ נקבל:

$$\begin{cases} 1-2x^2-2xy=0 \\ 1-2y^2-2xy=0 \end{cases}$$

נחסר את המשוואות זו מזו ונקבל:

$$2x^2-2y^2=0$$

כלומר: $2(x-y)(x+y)=0$.
אם $x-y=0$ אז $x=y$; נציב באחת המשוואות ונקבל:

$$1-2x^2-2x^2=0$$

ואז $x=\pm\frac{1}{2}$ והנקודות הן $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.
אם $x+y=0$ אז $x=-y$; נציב באחת המשוואות ונקבל:

$$1-2x^2+2x^2=0$$

כלומר $1=0$ וסתירה.
מטריצת הסה נראית כך:

$$H_f\left(x,y\right)=\begin{pmatrix} -4x-2y-2x+4x^3+4x^2y & -2x-2y+4x^2y+4y^2x \\ -2x-2y+4x^2y+4y^2x & -4y-2x-2y+4y^3+4y^2x \end{pmatrix}e^{-\left(x^2+y^2\right)}$$

בנקודות שלנו:

$$H_f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

המינורים הם: $|M_1|=-3<0$, $|M_2|=8>0$ ולכן זו נקודת מקסימום.

$$H_f\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

המינורים הם: $|M_1|=5>0, |M_2|=16>0$ ולכן זו נקודת מקסימום.

6. אנו רוצים למצוא קיצון של הפונקציה:

$$f\left(x,y,z\right)=2xy+2xz+2yz$$

תחת האילוץ:

$$g\left(x,y,z\right)=xyz-S=0$$

הלגראנז'יאן היא:

$$L\left(x,y,z,\lambda\right)=f+\lambda g$$

נשווה את הגרדיאנט ל-0:

$$\begin{cases} L_x=2y+2z+\lambda yz=0 \\ L_y=2x+2z+\lambda xz=0 \\ L_z=2x+2y+\lambda xy=0 \\ L_\lambda=xyz-S=0 \end{cases}$$

נחסר את המשוואה הראשונה מהשנייה ונקבל:

$$2x-2y+\lambda xz-\lambda yz=0$$

ולכן:

$$(x-y)(2+\lambda z)=0$$

אם $2+\lambda z=0$ אז $z=-\frac{2}{\lambda}$, אבל אם נציב זאת במשוואה הראשונה נקבל:

$$2y-\frac{4}{\lambda}-2y=0$$

כלומר $-\frac{4}{\lambda}=0$ וסתירה.

לכן, $x=y$.

באופן דומה מקבלים גם ש$-x=z$.

אם כך, זו קוביה.

מהאילוץ נקבל:

$$x^3=S$$

ולכן: $x=y=z=\sqrt[3]{S}$, ושטח הפנים המינימלי הוא:

$$6\sqrt[3]{S^2}$$

7. במקום להסתכל על פונקציית המרחק מהראשית, $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, נסתכל על פונקציית המרחק בריבוע:

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$$

כי למי יש כוח לגזור שורש. אם המרחק בריבוע מינימלי/מקסימלי, כך גם המרחק עצמו.

אם כן, האילוצים הם:

$$\begin{cases} g_1(x,y,z)=x^2+y^2-1=0 \\ g_2(x,y,z)=x+y-z=0 \end{cases}$$

הלגראנז'יאן היא:

$$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=f+\lambda_1 g_1+\lambda_2 g_2$$

נשווה את הגרדיאנט ל-0:

$$\begin{cases} L_x=2x+2\lambda_1 x+\lambda_2=0 \\ L_y=2y+2\lambda_1 y+\lambda_2=0 \\ L_z=2z-\lambda_2=0 \\ L_{\lambda_1}=x^2+y^2-1=0 \\ L_{\lambda_2}=x+y-z=0 \end{cases}$$

מהמשוואות השלישית והחמישית נקבל: $\lambda_2 = 2x + 2y$. נציב זאת בשתי המשוואות הראשונות ונקבל:

$$\begin{cases} 2x + 2\lambda_1 x + 2x + 2y = 0 \\ 2y + 2\lambda_1 y + 2x + 2y = 0 \end{cases}$$

ולכן $(2+\lambda_1)\,x + y = x + (2+\lambda_1)\,y = 0$, ואם כך: $(2+\lambda_1)^2 = 1$ (נבודד את x מהמשוואה הראשונה ונציב בשנייה, למשל), כלומר: $\lambda_1 = -1, -3$.
אם היינו בוחרים פתרון טריוויאלי, כלומר $x = 0$ או $y = 0$, לא היינו מקיימים את האילוצים.
אם $\lambda_1 = -1$, נקבל מהמשוואות הראשונות: $x = -y$.
מהאילוץ הראשון נקבל: $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ ובהתאמה $y = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}$, ומהאילוץ השני נקבל שבכל אופן $z = 0$, ואם כך הנקודות הן:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

ועבורן המרחק (בריבוע) הוא: $f = 1$.
אם $\lambda_1 = 3$, נקבל מהמשוואות הראשונות: $x = y$.
מהאילוץ הראשון נקבל: $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ ובהתאמה $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, ומהאילוץ השני נקבל ש: $z = \pm\sqrt{2}$, ואם כך הנקודות הן:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right)$$

ועבורן המרחק בריבוע הוא $f = 3$ (והמרחק עצמו הוא $\sqrt{3}$).
אפשר לראות שהגרדיאנטים של האילוצים $\nabla g_1, \nabla g_2$ הם בת"ל ולכן אלו הן הנקודות שלנו.

8. הגרדיאנטים של האילוצים הם:

$$(2x, 2y, 0), (0, 2y, 2z)$$

מתי הם תלויים ליניארית? יש 3 אופציות: $x, z = 0$, $y, z = 0$, $x, y = 0$. אף אחת מאלו לא מקיימת את האילוצים, ולכן הלגראנז'יאן תיתן לנו את המינימום והמקסימום.
אם כן, הלגראנז'יאן היא:

$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = y(x+z) + \lambda_1\left(x^2 + y^2 - 1\right) + \lambda_2\left(y^2 + z^2 - 4\right)$$

נשווה את הגרדיאנט ל–0:

$$\begin{cases} L_x = y + 2\lambda_1 x = 0 \\ L_y = x + z + 2\lambda_1 y + 2\lambda_2 y = 0 \\ L_z = y + 2\lambda_2 z = 0 \\ L_{\lambda_1} = x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ L_{\lambda_2} = y^2 + z^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

קצת אלגברה ליניארית. את שלוש המשוואות הראשונות אפשר להציג באופן הבא:

$$\begin{pmatrix} 2\lambda_1 & 1 & 0 \\ 1 & 2(\lambda_1+\lambda_2) & 1 \\ 0 & 1 & 2\lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

אם המטריצה הפיכה, נקבל שהפתרון הוא $(0,0,0)$ והוא כמובן לא מקיים את האילוצים.

לפיכך, נדרוש שהמטריצה אינה הפיכה, כלומר דטרמיננטתה מתאפסת:

$$0 = \begin{vmatrix} 2\lambda_1 & 1 & 0 \\ 1 & 2(\lambda_1+\lambda_2) & 1 \\ 0 & 1 & 2\lambda_2 \end{vmatrix} = 2\lambda_1 \cdot 2\lambda_2 \cdot 2(\lambda_1+\lambda_2) - 2\lambda_2 - 2\lambda_1$$

ולכן: $(4\lambda_1\lambda_2 - 1)(2\lambda_1 + 2\lambda_2) = 0$.

אם $\lambda_1 = -\lambda_2$, מהמשוואה השנייה נקבל $x = -z$. נציב זאת באילוץ הראשון ונקבל: $z^2 + y^2 = 1$, אך זו סתירה לאילוץ השני.

לכן, $4\lambda_1\lambda_2 - 1 = 0$, כלומר $4\lambda_1\lambda_2 = 1$.

מהמשוואות הראשונה והשלישית נקבל: $y = -2\lambda_1 x = -2\lambda_1 z$, נכפול זה בזה ונקבל:

$$y^2 = 4\lambda_1\lambda_2 xz = xz$$

נציב במשוואות האילוצים ונקבל:

$$\begin{cases} xz + x^2 = 1 \\ xz + z^2 = 4 \end{cases}$$

אם $x = 0$ אז גם $y = 0$ וזו סתירה לאילוץ הראשון. לכן אפשר להניח $x \neq 0$ ולכן:

$$z = \frac{1-x^2}{x}$$

נציב זאת באילוץ השני:

$$1 - x^2 + \frac{1 - 2x^2 + x^4}{x^2} = 4$$

נכפיל ב־x^2- ונקבל $5x^2=1$, כלומר $x=\pm\sqrt{\frac{1}{5}}$. במצב כזה, $z=\pm\sqrt{\frac{16}{5}}$.
לכן, $y^2=\frac{4}{5}$ בכל אופן, כלומר: $y=\pm\sqrt{\frac{4}{5}}$. אם כך, נקבל בסך הכל 4 נקודות:

$$\left(\sqrt{\frac{1}{5}},\pm\sqrt{\frac{4}{5}},\sqrt{\frac{16}{5}}\right),\left(-\sqrt{\frac{1}{5}},\pm\sqrt{\frac{4}{5}},-\sqrt{\frac{16}{5}}\right)$$

ערכי P בנקודות אלו הם:

$$P\left(\sqrt{\frac{1}{5}},\pm\sqrt{\frac{4}{5}},\sqrt{\frac{16}{5}}\right)=\pm2,P\left(-\sqrt{\frac{1}{5}},\pm\sqrt{\frac{4}{5}},-\sqrt{\frac{16}{5}}\right)=\mp2$$

ולכן המחיר נמצא בין -2 לבין 2.
בהנחה שאין מחיר שלילי, $0\leq P\leq 2$.

9. אנו מתבוננים בפונקציה $f(x,y)=x$ תחת האילוץ $g(x,y)=y^2+x^4-x^3=0$.
כלומר, $y^2=x^3-x^4$. לכן $x^3-x^4\geq 0$ ולכן $x\geq 0$. מצד שני, $x=0$ אכן מקיים את האילוץ, בנקודה $(0,0)$. לכן, המינימום המוחלט של f מתקבל בנקודה $(0,0)$.
ננסה למצוא אותו בעזרת כופלי לגראנז'. הלגראנז'יאן היא:

$$L(x,y,\lambda)=f+\lambda g$$

נשווה $\nabla L=0$:

$$\begin{cases} L_x=1+\lambda\left(4x^3-3x^2\right)=0\\ L_y=2\lambda y=0\\ L_\lambda=y^2+x^4-x^3=0\end{cases}$$

מהמשוואה השנייה, $\lambda=0$ או $y=0$.
אם $\lambda=0$ נקבל במשוואה הראשונה $1=0$ וסתירה. לכן $y=0$.
נציב זאת במשוואה השלישית ונקבל: $x^4-x^3=x^3(x-1)=0$ כלומר $x=0$ או $x=1$.
אם $x=0$ נקבל במשוואה הראשונה $1=0$ וסתירה. לכן $x=1$, וקיבלנו את הנקודה $(1,0)$.
אנו יודעים ש־$(0,0)$ המינימום המוחלט של f תחת האילוץ ובכל זאת כופלי לגראנז' לא נתנו אותה; זאת, מכיוון שהגרדיאנט של g:

$$\nabla g=\left(2y,4x^3-3x^2\right)$$

מתאפס בנקודה $(0,0)$.