פתרון תרגיל 6 - אינפי 1

1) מצאו את הנגזרת מסדר גבוה עבור הפונקציות הבאות:

א) $y = \tan x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} = (\cos x)^{-2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -2(\cos x)^{-3}(-\sin x) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}$$

ב) $y = \frac{x^3-3}{x^2+2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2(x^2+2) - 2x(x^3-3)}{(x^2+2)^2} =$$

$$= \frac{3x^4+6x^2-2x^4+6x}{(x^2+2)^2} =$$

$$= \frac{x^4+6x^2+6x}{(x^2+2)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(4x^3+12x+6)(x^2+2)^2 - 2(x^2+2)2x(x^4+6x^2+6x)}{(x^2+2)^4}$$

ג) $y = 3\sin(5x-2) + 4\cos(10-x)$

נסמן

$f = 3\sin(5x-2)$

$g = 4\cos(10-x)$

$$f' = 3\cdot 5\cos(5x-2) \qquad g' = 4\sin(10-x)$$

$$f'' = -3\cdot 5^2\sin(5x-2) \qquad g'' = -4\cos(10-x)$$

$$f''' = -3\cdot 5^3\cos(5x-2) \qquad g''' = -4\sin(10-x)$$

$$f'''' = 3\cdot 5^4\sin(5x-2) \qquad g'''' = 4\cos(10-x)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$f^{(92)}(x) = 3\cdot 5^{92}\sin(5x-2) \qquad g^{(92)}(x) = 4\cos(10-x)$$

$$\frac{d^{92}y}{dx^{92}} = 3\cdot 5^{92}\sin(5x-2) + 4\cos(10-x)$$

2) חשבו את $\frac{dy}{dx}$ עבור:

א) $e^{\sin x} = \cos(x^2-1)\,y$

פתרון

$$\frac{d(e^{\sin x})}{dx} = \frac{d(\cos(x^2-1)\,y)}{dx}$$

$$e^{\sin x}\cdot\cos x = -\sin(x^2-1)\cdot 2xy + \cos(x^2-1)\frac{dy}{dx}$$

$$\cos(x^2-1)\frac{dy}{dx} = e^{\sin x}\cdot\cos x + 2xy\sin(x^2-1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{\sin x}\cdot\cos x + 2xy\sin(x^2-1)}{\cos(x^2-1)}$$

$$y^3 = \ln(5x - 7y)$$ (ב

<u>פתרון</u>

$$\frac{d(y^3)}{dx} = \frac{d(\ln(5x-7y))}{dx}$$

$$3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{5x-7y} \frac{d(5x-7y)}{dx}$$

$$3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{5x-7y} \cdot \left(5 - 7\frac{dy}{dx}\right)$$

$$3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{5}{5x-7y} - \frac{7}{5x-7y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{7}{5x-7y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{5}{5x-7y}$$

$$\frac{dy}{dx}\left(3y^2 + \frac{7}{5x-7y}\right) = \frac{5}{5x-7y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{5}{5x-7y}}{\left(3y^2 + \frac{7}{5x-7y}\right)}$$

$$e^{2x} = y^2 + \tan(xy)$$ (ג

<u>פתרון</u>

$$\frac{d(e^{2x})}{dx} = \frac{d(y^2 + \tan(xy))}{dx}$$

$$2 \cdot e^{2x} = 2y \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{1}{\cos^2(xy)} \frac{d(xy)}{dx}$$

$$2 \cdot e^{2x} = 2y \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{1}{\cos^2(xy)} \cdot \left(y + x\frac{dy}{dx}\right)$$

Scanned by CamScanner

$$2\cdot e^{2x} = 2y\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{y}{\cos^2(xy)} + \frac{x}{\cos^2(xy)}\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$2\cdot e^{2x} - \frac{y}{\cos^2(xy)} = \frac{x}{\cos^2(xy)}\cdot\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx}$$

$$2\cdot e^{2x} - \frac{y}{\cos^2(xy)} = \frac{dy}{dx}\left(\frac{x}{\cos^2(xy)} + 2y\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\cdot e^{2x} - \frac{y}{\cos^2(xy)}}{\left(\frac{x}{\cos^2(xy)} + 2y\right)}$$

2) $yx^2 - x + 2y = 1$

פתרון

$$\frac{d(yx^2 - x + 2y)}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx}\cdot x^2 + y\cdot 2x - 1 + 2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx}(x^2 + 2) = 1 - 2xy$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-2xy}{x^2+2}$$

3) מצאו את שיפוע המשיקה $x + y^4 = y$

בנקודה $(-14, 2)$.

פתרון נחשב נגזרת $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(x+y^4)}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 + 4y^3\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} - 4y^3\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx}(1-4y^3) = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-4y^3}$$

נציב $(-14, 2)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-4\cdot 2^3} = \frac{1}{1-32} = \boxed{\frac{-1}{31}}$$

4) חשבו את הגבולות הבאים: (במידה וקיימים)

א)

$$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{8}-\sqrt{x}}{8-x} = \underset{0\neq\Delta x\approx 0}{st}\left(\frac{\sqrt{8}-\sqrt{8+\Delta x}}{8-(8+\Delta x)}\right)$$

$$= \underset{0\neq\Delta x\approx 0}{st}\left(\frac{\sqrt{8}-\sqrt{8+\Delta x}}{-\Delta x}\right) = \underset{0\neq\Delta x\approx 0}{st}\left(\frac{8-(8+\Delta x)}{-\Delta x(\sqrt{8}+\sqrt{8+\Delta x})}\right)$$

כפל בצמוד

$$= \underset{0\neq\Delta x\approx 0}{st}\left(\frac{-\Delta x}{-\Delta x(\sqrt{8}+\sqrt{8+\Delta x})}\right) = \underset{0\neq\Delta x\approx 0}{st}\left(\frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{8+\Delta x}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{8}}$$

ב)
$$\lim_{x\to 0}\frac{17+8x^{-3}-x^{-1}}{5-2x+3x^{-3}}=\underset{0\neq\Delta x\simeq 0}{st}\left(\frac{17+8\Delta x^{-3}-\Delta x^{-1}}{5-2\Delta x+3\Delta x^{-3}}\right)$$

$$=\underset{0\neq\Delta x\simeq 0}{st}\left(\frac{\frac{17\Delta x^{3}+8-\Delta x^{2}}{\Delta x^{3}}}{\frac{5\Delta x^{3}-2\Delta x^{4}+3}{\Delta x^{3}}}\right)=\underset{0\neq\Delta x\simeq 0}{st}\left(\frac{17\Delta x^{3}+8-\Delta x^{2}}{5\Delta x^{3}-2\Delta x^{4}+3}\right)=\boxed{\frac{8}{3}}$$

ג)
$$\lim_{x\to 1}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}=\underset{0\neq\Delta x\simeq 0}{st}\left(\sqrt{(1+\Delta x)+\sqrt{1+\Delta x+\sqrt{1+\Delta x}}}\right)$$

$$=st\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}=\sqrt{1+\sqrt{1+1}}=\sqrt{1+\sqrt{2}}$$

ד) <u>הוכחה או הפרכה:</u>

א) נניח כי $\lim_{x\to x_0} f(x)$ לא קיים וגם $\lim_{x\to x_0} g(x)$ לא קיים, אזי בהכרח $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$ קיים.

<u>הפרכה</u>

נקח $f(x)=g(x)=\frac{1}{x}$ ב- $x_0=0$ (נקודה)

$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}+\frac{1}{x}$ לא קיים וגם

לא קיים.

ב) נניח כי $\lim_{x\to x_0} f(x)$ קיים וגם $\lim_{x\to x_0} g(x)$ לא קיים, אזי בהכרח הגבול $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$ קיים.

<u>הפרכה</u>

נקח $f(x)=x$ ב- $x=0$

$g(x)=\frac{1}{x}$ ב- $x=0$

$\lim_{x\to 0} x = 0$ ו- $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ לא קיים

אבל הגבול (הבא) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot x$ לא קיים.

ג) נניח כי $\lim_{x\to x_0} f(x)$ לא קיים וגם $\lim_{x\to x_0} g(x)$ לא קיים. אזי הגבול (הבא) לא קיים $\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))$.

<u>הפרכה</u>

הגבול יכול להיות קיים. נניח

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\le 0\\ 0, & x>0\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}-1, & x\le 0\\ 0, & x>0\end{cases}$$

הגבולות של f ו-g לא קיימים ב-0, אבל הגבול של $f(x)\pm g(x)=0$ קיים.

ד) נניח שהגבול $\lim_{x\to x_0} f(x)$ קיים וגם $\lim_{x\to x_0} g(x)$ לא קיים. אזי הגבול (הבא) לא קיים $\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))$

<u>הוכחה</u>

נגדיר $h(x)=f(x)\pm g(x)$ ונניח בשלילה כי הגבול של $h(x)$ קיים ב- x_0.

אזי $g(x)=h(x)-f(x)$

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=\lim_{x\to x_0}(h(x)-f(x))=\lim_{x\to x_0} h(x)-\lim_{x\to x_0} f(x)$$

כי הגבולות קיימים לפי הנתון, שהגבול מאגף ימין קיים ולכן שהגבול של $g(x)$ ב- x_0 קיים בסתירה לנתון.