תורת החבורות 88-218-01 תשפ"ב
הערות תרגול 13

שלום!

0.1 תת־חבורת הקומוטטורים

הגדרה 0.1. תהי G חבורה. הקומוטטור של זוג איברים $a,b \in G$ הוא האיבר

$$[a,b] = aba^{-1}b^{-1}$$

הערה 0.2. הקומוטטור "מודד" עד כמה זוג איברים מתחלף. בפרט, האיברים a,b מתחלפים אם ורק אם $[a,b]=e$. באופן כללי $ab=[a,b]ba$.

הגדרה 0.3. תהי G חבורה. תת־חבורת הקומוטטורים, הנקראת גם תת־חבורת הנגזרת, שלה היא

$$G' = [G,G] = \langle \{[a,b] \mid a,b \in G\} \rangle$$

כלומר תת־החבורה הנוצרת על ידי קבוצת הקומוטטורים.

הערה 0.4. נדגיש שלא כל איבר של G' הוא בהכרח קומוטטור, אלא מכפלה של קומוטטורים.

מתקיים $G' = \{e\}$ אם ורק אם G אבלית. ההופכי של כל קומוטטור גם הוא קומוטטור:

$$[a,b]^{-1} = (aba^{-1}b^{-1})^{-1} = bab^{-1}a^{-1} = [b,a]$$

הערה 0.5. אם $H \leq G$, אז $H' \leq G'$.

באופן כללי, אם $A \subseteq B \subseteq G$, אז $\langle A \rangle \leq \langle B \rangle$.

הערה 0.6. תמיד $G' \lhd G$. אפשר לבדוק עבור קומוטטור בודד כי לכל $g \in G$ מתקיים

$$g[a,b]g^{-1} = [gag^{-1}, gbg^{-1}]$$

ובעזרת אינדוקציה, נקבל שכל מכפלת קומוטטורים היא מכפלה של קומוטטורים, ולכן G' סגורה להצמדה. למעשה G' מקיימת תכונה הרבה יותר חזקה. לכל הומומורפיזם $f\colon G \to G$ מתקיים כי

$$f([a,b]) = [f(a), f(b)]$$

ולכן $f(G') \subseteq G'$. תת־חבורה שמקיימת את התכונה הזאת נקראת אופיינית במלואה.

הגדרה 0.7. חבורה G נקראת מושלמת אם $G' = G$.

מסקנה 0.8. כל חבורה פשוטה לא אבלית היא מושלמת.

הוכחה. נניח כי G חבורה פשוטה לא אבלית. נזכר כי $G' \lhd G$, ומפני ש-G פשוטה יש רק שתי אפשרויות לכל היותר לתת־חבורות נורמליות. אצלנו $G' \neq \{e\}$ כי G לא אבלית, ולכן בהכרח $G' = G$. $\square$

דוגמה 0.9. לכל $n \geq 5$ החבורה A_n היא מושלמת. החבורה $\mathbb{Z}_5$ היא פשוטה, אבל לא מושלמת (היא אבלית ולכן $\mathbb{Z}_5' = \{0\}$). האם יש חבורות מושלמות לא פשוטות? כן, למשל $A_5 \times A_7$.

משפט 0.10. המנה G/G', שנסמן אותה $\overline{G}$, נקראת האבליניזציה של G. האבליניזציה של G היא המנה האבלית הגדולה ביותר של G. כלומר:

1. חבורת המנה G/G' אבלית.
2. לכל $N \lhd G$ מתקיים G/N אבלית אם ורק אם $G' \leq N$. כלומר G/N איזומורפית למנה של G/G'.

דוגמה 0.11. אם A חבורה אבלית, אז $A/A' \cong A$. הרי $A' = \{e\}$.

תרגיל 0.12 (לבית)**.** תהי G חבורת-p סופית. הוכיחו כי G לא מושלמת.

דוגמה 0.13. תהי $D_4 = \langle \sigma, \tau \,|\, \dots \rangle$. ראינו $Z(D_4) = \langle \sigma^2 \rangle = \{\mathrm{id}, \sigma^2\}$. כמו כן $D_4/Z(D_4)$ היא חבורה מסדר $8/2 = 2^2$. כל חבורה מסדר p^2 עבור p ראשוני היא אבלית. לפי המשפט לעיל $D_4' \leq Z(D_4)$. מצד שני, ברור ש-$D_4' \neq \{\mathrm{id}\}$ כי D_4 לא אבלית. אז בהכרח $D_4' = Z(D_4)$.

תרגיל 0.14. מצאו את S_n' לכל $n \geq 5$.

פתרון. בכיוון אחד מראים כי $A_n' \leq S_n'$. מצד שני כל קומוטטור הוא תמורה זוגית, ולכן כל מכפלה של קומוטטורים היא תמורה זוגית. כלומר $S_n' \leq A_n$. אבל $A_n = A_n' \leq S_n' \leq A_n$. בסך הכל $S_n' = A_n$.

כהערה, גם עבור $n = 4$ ו-$n = 3$ מתקיים כי $S_n' = A_n$, אבל מסיבות אחרות. עבור $n = 3$ אפשר לחשב ישירות או לשים לב כי $S_3' \neq \{\mathrm{id}\}$ מפני ש-S_3 לא אבלית. עבור $n = 4$ צריך לשים לב כי $(234) = [(123), (24)]$.

תרגיל 0.15. תהי G חבורה מסדר 28.

1. הוכיחו שיש לה תת־חבורה נורמלית $P \lhd G$ מסדר 7.
2. הוכיחו שאם G לא אבלית, אז $|G'| = 7$.
3. הוכיחו שאם G לא אבלית (והניחו שקיימת תת־חבורה נורמלית $N \lhd G$ מסדר 2), אז $|Z(G)| = 2$.

פתרון. נחשב כי $28 = 2^2 \cdot 7$.

1. לפי משפט סילו III אפשר לבדוק כי $n_7 | 4$ וגם $n_7 \equiv 1 \pmod 7$. אז בהכרח $n_7 = 1$. כלומר יש לה תת־חבורה 7-סילו P מסדר 7, ומפני שהיא יחידה, אז היא נורמלית. זאת תת־החבורה P המבוקשת.

2. נתבונן בתת־החבורה $P \lhd G$ מהסעיף הקודם. חבורת המנה G/P היא מסדר $\frac{28}{7} = 4$ לפי משפט לגראנז', ולפי נימוק דומה למקודם היא אבלית. לכן $G' \leq P$ לפי המשפט לעיל על אבליניזציה. אבל G לא אבלית, ולכן $G' \neq \{e\}$. מפני ש-$P \cong \mathbb{Z}_7$ כי היא מסדר ראשוני (אז היא גם פשוטה), בהכרח נקבל $G' = P$, שהיא מסדר 7.

3. לפי משפט לגראנז', הסדר של המרכז שייך לקבוצה

$$|Z(G)| \in \{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$$

אפשר לפסול מייד את 28, כי G לא אבלית. אפשר לפסול את 14 ואת 4 כי אז המנה $G/Z(G)$ ציקלית (כי המנה מסדר ראשוני), וראינו שבמקרה כזה G אבלית.
כעת, נשתמש בהנחה לגבי קיום תת־חבורה נורמלית $G \rhd N$ מסדר 2. נזכר כי תת־חבורות נורמליות הן איחוד של מחלקות צמידות. במקרה אצלנו $N = \{e, a\}$. אז מחלקת הצמידות של האיבר a היא $\{a\}$, כלומר a הוא איבר מרכזי. לכן $N \subseteq Z(G)$. אז מייד נפסול את האפשרויות כי $|Z(G)| \in \{1, 7\}$ כי $2 | |Z(G)|$. נשארו רק עם האפשרות $Z(G)$ מסדר 2.
דרך אחרת, שלא מתבססת על ההנחה, היא להסתכל על תת־חבורת 2-סילו $Q \leq G$. נשים לב כי $P \cap Q = \{e\}$ וגם $PQ = G$. לכן קיים הומומורפיזם $\varphi\colon Q \to \mathrm{Aut}(P)$ המוכיח (מבלי שהגדרנו מה זה) כי $G \cong P \rtimes_\varphi Q$. שמים לב כי $\mathrm{Aut}(P) \cong U_7 \cong \mathbb{Z}_6$, ואז ממיינים את כל ארבע החבורות מסדר 28.

0.2 סדרות נורמליות וסדרות הרכב

הגדרה 0.16. תהי G חבורה. סדרה תת־נורמלית של G היא סדרה של תת־חבורות

$$\{e\} = G_n \lhd G_{n-1} \lhd \cdots \lhd G_2 \lhd G_1 = G$$

כאשר $G_{i+1} \lhd G_i$. שימו לב שאין דרישה ש-G_i תהיה נורמלית ב-G. לחבורות המנה G_i/G_{i+1} קוראים הגורמים או המנות של הסדרה.

דוגמה 0.17. תהי G חבורה. קיימת לה סדרה תת־נורמלית $\{e\} \lhd G$, והגורם היחיד של הסדרה הוא $G/\{e\} \cong G$.

הגדרה 0.18. תהי $\{e\} = G_n \lhd \cdots \lhd G_1 = G$ סדרה תת־נורמלית של G. עידון של הסדרה הזו סדרה תת־נורמלית שבה יש את אותן תת־חבורות ומוסיפים תת־חבורות נוספות G_i^*:

$$\{e\} = G_n \lhd \cdots \lhd G_{i+1} \lhd G_i^* \lhd G_i \lhd \cdots \lhd G_2 \lhd G_1 = G$$

כאשר הגורמים החדשים G_i/G_i^* וגם G_i^*/G_{i+1} אינם טריוויאלים.

הגדרה 0.19. סדרה תת־נורמלית שאין לה עידונים נקראת סדרת הרכב.

דוגמה 0.20. עבור $G = S_3$ יש סדרת הרכב יחידה

$$\{\mathrm{id}\} \lhd A_3 \lhd S_3$$

והגורמים שלה הם $S_3/A_3 \cong \mathbb{Z}_2$ ו-$A_3/\{\mathrm{id}\} \cong \mathbb{Z}_3$.

הערה 0.21. סדרה תת־נורמלית היא סדרת הרכב אם ורק אם כל הגורמים של הסדרה פשוטים.

דוגמה 0.22. נבחר $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$. הסדרה

$$\{0\} \times \{0\} \lhd \mathbb{Z}_2 \times \{0\} \lhd \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$$

היא סדרה תת־נורמלית, שאינה סדרת הרכב. אחד הגורמים איזומורפי ל-$\mathbb{Z}_4$ שאינה פשוטה. לכן ניתן לעדן אותה:

$$\{0\} \times \{0\} \lhd \mathbb{Z}_2 \times \{0\} \lhd \mathbb{Z}_2 \times \langle 2 \rangle \lhd \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$$

ואז כל הגורמים פשוטים (במקרה זה איזומורפיים ל-$\mathbb{Z}_2$), ולכן זו סדרת הרכב.

דוגמה 0.23. הסדרה $\{\mathrm{id}\} \lhd A_n \lhd S_n$ היא סדרת הרכב לכל $n \geq 5$, כי הגורמים פשוטים, הרי $A_n/\{\mathrm{id}\} \cong A_n$ ו-$S_n/A_n \cong \mathbb{Z}_2$.

עבור $n = 4$ זו לא סדרת הרכב, כי ניתן לעדן אותה:

$$\{\mathrm{id}\} \lhd V \lhd A_4 \lhd S_4$$

כאשר $V = \langle (12)(34), (13)(24) \rangle$ היא חבורת קליין. זו עדיין לא סדרת הרכב, כי הגורם האחרון איזומורפי ל-$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ שאינה פשוטה. לכן ניתן לעדן שוב:

$$\{\mathrm{id}\} \lhd \langle (12)(34) \rangle \lhd V \lhd A_4 \lhd S_4$$

ועכשיו הגורמים לפי הסדר איזומורפיים לחבורות הפשוטות: $S_4/A_4 \cong \mathbb{Z}_2$, $A_4/V \cong \mathbb{Z}_3$, $V/\langle (12)(34) \rangle \cong \mathbb{Z}_2$ ו-$\langle (12)(34) \rangle / \{\mathrm{id}\} \cong \mathbb{Z}_2$.

$$\{\mathrm{id}\} \lhd S_2$$

משפט 0.24 (ז'ורדן-הולדר)**.** *כל סדרות ההרכב של חבורה G הן מאותו האורך, ועם אותן מנות עד כדי סדר.*

דוגמה 0.25. לחבורה $\mathbb{Z}_{12}$ יש שלוש סדרות הרכב:

$$0 \lhd \langle 6 \rangle \lhd \langle 2 \rangle \lhd \mathbb{Z}_{12}$$
$$0 \lhd \langle 6 \rangle \lhd \langle 3 \rangle \lhd \mathbb{Z}_{12}$$
$$0 \lhd \langle 4 \rangle \lhd \langle 2 \rangle \lhd \mathbb{Z}_{12}$$

שבכולן הגורמים איזומורפיים, עד כדי סדר, לחבורות $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3$.

0.3 חבורות פתירות

הגדרה 0.26. חבורה תקרא פתירה אם קיימת לה סדרה תת־נורמלית שכל הגורמים בה אבליים.

דוגמה 0.27.

1. כל חבורה אבלית G היא פתירה, לפי הסדרה התת־נורמלית $G \rhd \{e\}$.
2. כל החבורות הדיהדרליות פתירות, שכן בסדרה התת־נורמלית $D_n \rhd \langle\sigma\rangle \rhd \{\mathrm{id}\}$ המנות איזומורפיות ל-$\mathbb{Z}_2$ ו-$\mathbb{Z}_n$ שהן אבליות.
3. החבורות S_n ו-A_n אינן פתירות לכל $n \geq 5$.

תרגיל 0.28. יהי p ראשוני. תהי G חבורה מסדר p^3. הוכיחו שהיא פתירה.

פתרון. אם G אבלית, אז היא בוודאי פתירה.
כעת נניח ש-G לא אבלית. המרכז שלה $Z(G)$ אינו טריוויאלי כי G חבורת-p סופית, והוא גם לא כל G כי G לא אבלית. נתבונן בסדרה התת־נורמלית $G \rhd Z(G) \rhd \{e\}$ שמנות בו הן מסדר p או p^2, ולכן אבליות. כלומר G פתירה.

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{a \notin Z(G), \text{rep.}} |\mathrm{conj}(a)|$$

משפט 0.29. כל חבורת-p סופית היא פתירה.

טענה 0.30. תהי G חבורה מסדר pq, עבור p, q ראשוניים. הוכיחו כי G פתירה.

הוכחה. אם $p = q$, אז $|G| = p^2$. לכן G אבלית, ובהכרח פתירה.
נניח בלי הגבלת הכלליות כי $p < q$. לפי משפט סילו III נקבל $n_q | p$ וגם $n_q \equiv 1 \pmod q$. אבל המחלקים של p הם רק 1 ו-p, ולא ייתכן $p \equiv 1 \pmod q$ אם $p < q$. אז $n_q = 1$. כלומר קיימת תת־חבורה q-סילו $G \rhd Q$ והיא נורמלית כי היא יחידה. נתבונן בסדרה התת־נורמלית $G \rhd Q \rhd \{e\}$, והגורמים בה איזומורפיים ל-$G/Q \cong \mathbb{Z}_p$ ו-$Q/\{e\} \cong \mathbb{Z}_q$, שהן חבורות אבליות. לכן G פתירה. $\square$

תרגיל 0.31. הוכיחו שכל חבורה מסדר $1089 = 3^2 \cdot 11^2$ היא פתירה.

פתרון. לפי משפט סילו III נקבל כי $n_{11} | 3^2$ וגם $n_{11} \equiv 1 \pmod{11}$. לכן בהכרח $n_{11} = 1$. תהי Q תת־חבורת 11-סילו של G. אז $G \rhd Q$, שוב כי היא יחידה. לכן בסדרה התת־נורמלית $G \rhd Q \rhd \{e\}$ המנות מסדר $|G/Q| = 3^2$ או $|Q/\{e\}| = 11^2$, שהן אבליות, ולכן G פתירה.

משפט 0.32 (מההרצאה). תהי $G \rhd N$. החבורה G פתירה אם ורק אם החבורות N ו-G/N פתירות.

$$\{e_G\} = N_k \lhd \cdots \lhd N_1 = N$$
$$\{N\} = \{e_{G/N}\} \lhd \cdots \lhd G/N$$

דוגמה 0.33. כל חבורה מסדר $11979 = 3^2 \cdot 11^3$ היא פתירה. כמו בתרגיל הקודם, מראים כי $n_{11} = 1$ ומסתכלים על הסדרה התת־נורמלית $G \rhd Q \rhd \{e\}$ כאשר Q תת־חבורת 11-סילו. אולי Q לא אבלית (כי היא מסדר 11^3), אבל היא פתירה, וגם המנה לגביה פתירה. אז G פתירה.

הגדרה 0.34. תהי G חבורה. נגדיר באופן רקורסיבי את סדרת תת־חבורות הנגזרת שלה לפי $G^{(0)} = G$ ולכל $n > 0$ נגדיר $G^{(n)} = [G^{(n-1)}, G^{(n-1)}]$.

הערה 0.35. ברור כי $G' = G^{(1)}$. לכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים כי $G \rhd G^{(k)}$ ובפרט $G^{(k)} \rhd G^{(k-1)}$.

משפט 0.36 (מההרצאה)**.** חבורה G היא פתירה אם ורק אם קיים $t \in \mathbb{N}$ עבורו $G^{(t)} = \{e\}$.

המספר t המינימלי עבורו $G^{(t)} = \{e\}$ נקרא דרגת הפתירות של G.

דוגמה 0.37. נבחר $G = D_3$. אז $G^{(1)} = G' = \langle \sigma \rangle$ ולכל $k \geq 2$ מתקיים $G^{(k)} = \{\mathrm{id}\}$. לכן דרגת הפתירות של D_3 היא 2.

דוגמה 0.38. עוד דרך להראות כי S_n לא פתירה לכל $n \geq 5$ הוא לחשב כי $S_n^{(k)} = A_n \neq \{\mathrm{id}\}$ לכל $k \geq 1$.

תרגיל 0.39. הוכיחו כי לכל חבורה פתירה G לא טריוויאלית יש תת־חבורה נורמלית אבלית שאינה $\{e\}$.

פתרון. החבורה פתירה, ולכן קיים $t \in \mathbb{N}$ מינימלי עבורו $G^{(t)} = \{e\}$. לכן $G^{(t-1)}$ היא תת־חבורה אבלית, כי הנגזרת שלה היא $G^{(t)} = \{e\}$. בנוסף $G^{(t-1)}$ נורמלית ב-G ולא טריוויאלית בגלל המינימליות של t.

תרגיל 0.40 (לבית)**.** הוכיחו שאם G חבורה מסדר pq עבור ראשוניים המקיימים $p \not\equiv 1 \pmod q$, אז G ציקלית.

זה קשור לתרגיל שבו מוכיחים שכל חבורה מסדר אי זוגי הקטן מ-21 היא אבלית.