• טורי פורייה של פונקציות בסיסיות וטורים מספריים המתקשרים אליהם

הפונקציה $f(x)$	טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$	טורים מספריים המתקשרים לטור פורייה
x	$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{k+1}}{k}\sin kx$	$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$
$\operatorname{sgn} x$	$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$	$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}=\frac{\pi}{4}$
$\|x\|$	$\frac{\pi}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$	$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$ $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$
x^2	$\frac{\pi^2}{3}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4(-1)^k}{k^2}\cos kx$	$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}=\frac{\pi^4}{90}$ $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}=\frac{\pi^2}{12}$

הערה
סכומי הטורים המספריים מתקבלים על סמך משפט דיריכלה ושוויון פרסבל.

תרונות לתרגילים

2.1

מא נה

1. מצא טור פורייה של $f(x)=|\sin x|$ בקטע $[-\pi,\pi]$.

2. מצא טור פורייה בקטע $[-\pi,\pi]$ של הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x\le 0\\ e^x, & 0<x\le\pi\end{cases}.$$

3. מצא טור פורייה בקטע $[-\pi,\pi]$ של הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases}\cos x, & -\pi\le x\le 0\\ \sin x, & 0<x\le\pi\end{cases}.$$

מצא טור פורייה בקטע $[-\pi,\pi]$ של הפונקציה.

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x\le 0\\ \sin x, & 0<x\le\pi\end{cases}.$$

$f(x)=|\sin x|$ היא זוגית. לכן בקטע $[-\pi,\pi]$ יש לה טור פורייה
(ר' סקר תאוריה)

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx,$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\frac{2}{\pi}(-\cos x)\Big|_0^{\pi}=\frac{4}{\pi},$$

$$a_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos x\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin 2x\,dx$$
$$=-\frac{1}{2\pi}\cos 2x\Big|_0^{2\pi}=\frac{1-\cos 4\pi}{2\pi}=0$$

n >

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+1)x-\sin(n-1)x}{2}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos(n+1)x}{n+1}+\frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{(-1)^{n+1}-1}{\pi}\frac{2}{n^2-1}\ .$$

מכאן

$$a_n=\begin{cases}0\,, & n=2k+1\\ -\dfrac{4}{\pi\left(4k^2-1\right)}, & n=2k\end{cases}\qquad k=1,2,3,\ldots$$

לכן טור פורייה של הפונקציה $f(x)=|\sin x|$ בקטע $[-\pi,\pi]$ הוא

$$f(x)\sim\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{4k^2-1}$$

ב.

לפי הגדרת מקדמי פורייה

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^x\,dx=\frac{e^{\pi}-1}{\pi},$$

$$a_n'=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^x\cos nx\,dx\ ,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^x\sin nx\,dx\ .$$

באמצעות אינטגרציה בחלקים נקבל

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left(e^x\cos nx\Big|_0^{\pi}+n\int_0^{\pi}e^x\sin nx\,dx\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(e^{\pi}(-1)^n-1+ne^x\sin nx\Big|_0^{\pi}-n^2\int_0^{\pi}e^x\cos nx\,dx\right)$$

$$=\frac{e^{\pi}(-1)^n-1}{\pi}-n^2a_n$$

כך ש-

$$a_n=\frac{e^{\pi}(-1)^n-1}{\pi\left(1+n^2\right)}.$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^x\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}e^x\sin nx\Big|_0^{\pi}+n\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^x\cos nx\,dx=na_n$$

$$=\frac{n\left(e^{\pi}(-1)^n-1\right)}{\pi\left(1+n^2\right)}.$$

...וריה של $f(x)$ הוא

$$f(x)\sim\frac{e^{\pi}-1}{2\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\pi}(-1)^n-1}{\pi\left(1+n^2\right)}\cos nx-\frac{\left(e^{\pi}(-1)^n-1\right)n}{\pi\left(1+n^2\right)}\sin n\ldots$$

...דרת מקדמי פורייה והאורתוגונליות של המערכת הטריגונומטרית בקטעים ...$[-\pi,$..., נקבל

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\cos x\,dx+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\frac{2}{\pi},$$

$$a_1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\cos^2 x\,dx+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos x\sin x\ldots$$

$$b_1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\cos x\sin x\,dx+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2 x\,d\ldots$$

...n, נקבל

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\cos x\cos nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos\ldots$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos nx\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\sin(n+1)x-\sin(n-1)x\right)dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos(n-1)x}{n-1}-\frac{\cos(n+1)x}{n+1}\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}\frac{(-1)^{n-1}-1}{n^2-1}\ ,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\cos x\sin nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin x\sin nx\,dx$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\cos x\sin nx\,dx=-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos x\sin nx\,dx$$
$$=-\frac{1}{\pi}\left(\sin x\sin nx\Big|_0^{\pi}-n\int_0^{\pi}\sin x\cos nx\,dx\right)$$
$$=\frac{n}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos nx\,dx=na_n=\frac{2n}{\pi}\frac{(-1)^{n-1}-1}{n^2-1}\ .$$

מהתוצאות לעיל נובע כי $a_n=b_n=0$ לכל $n>1$ אי-זוגי. אם n זוגי נקבל

$$\begin{cases} a_{2k}=-\dfrac{4}{\pi}\dfrac{1}{4k^2-1} \\ b_{2k}=-\dfrac{8k}{\pi}\dfrac{1}{4k^2-1}\end{cases},\qquad k=1,2,3,\ldots$$

לכן טור פורייה של הפונקציה הנתונה בקטע $[-\pi,\pi]$ הוא

$$f(x)\sim\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}(\cos x+\sin x)-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}(\cos 2kx+2k\sin 2kx)$$

ד.
קל לראות כי

$$f(x)=\frac{1}{2}(\sin x+|\sin x|)$$

נציין כי טור פורייה של $\sin x$ הוא $\sin x$ בעצמו. מעובדה זו, ומתוצאת התרגיל א', בשימוש בתכונת הלינאריות של טורי פורייה (ר' סקר תאוריה), נסיק כי טור פורייה

של הפונקציה הנתונה בקטע $[-\pi,\pi]$ הוא

$$f(x)\sim\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin x-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{4k^2-1}$$

__תרגיל 2.2__

מצא טור פורייה בקטע $[-\pi,\pi]$ של הפונקציה

$$f_p(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x\le p \\ 1, & p<x\le\pi\end{cases},$$

...ר p מספר ממשי כלשהו בקטע $[-\pi,\pi]$: $-\pi<p<\pi$.

...חגדרת מקדמי פורייה

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_p(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_p^{\pi}dx=\frac{\pi-p}{\pi},$$
$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_p(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_p^{\pi}\cos nx\,dx=\frac{\sin n\pi-\sin np}{\pi n}=\frac{-\sin np}{\pi n}$$
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_p(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_p^{\pi}\sin nx\,dx=-\frac{\cos n\pi-\cos np}{\pi n}$$
$$=\frac{\cos np+(-1)^{n+1}}{\pi n}\ .$$

...ר פורייה של הפונקציה הנתונה בקטע $[-\pi,\pi]$ הוא

$$f(x)\sim\frac{\pi-p}{2\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{\sin np}{n\pi}\cos nx+\frac{\cos np+(-1)^{n+1}}{\pi n}\sin nx,$$

...חישוב נקבל

$$f(x)\sim\frac{\pi-p}{2\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n(x-p)+(-1)^{n+1}\sin nx}{n\pi}\ .$$

2.

f פונקציה רציפה למקוטעין ומחזורית במחזור 2π. יהי

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$$

...רייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$.

נגדיר $g(x)=f(x+\pi)$ לכל $x\in\mathbb{R}$ ויהי

$$g(x)\sim\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos nx+B_n\sin nx$$

הטור פורייה של $g(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$.

הבע את A_n, B_n על ידי a_n, b_n.

ב. נגדיר $h(x)=f(x)\cos x$ לכל $x\in\mathbb{R}$ ויהי

$$h(x)\sim\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx$$

הטור פורייה של $h(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$.

הבע את α_n ו- β_n על ידי a_n ו- b_n.

פתרון

א.

לפי הגדרת מקדמי פורייה, על סמך המחזוריות במחזור 2π של $f(x)$ נקבל

$$A_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+\pi)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=a_0\,,$$

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+\pi)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}f(x)\cos n(x-\pi)\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}f(x)\cos nx\cos n\pi\,dx=\frac{(-1)^n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=(-1)^n a_n\,,$$

$$B_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+\pi)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}f(x)\sin n(x-\pi)\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}f(x)\sin nx\cos n\pi\,dx=\frac{(-1)^n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=(-1)^n b_n\,.$$

בכך הוכחנו כי

$$A_0=a_0\ ,\ A_n=(-1)^n a_n\ ,\ B_n=(-1)^n b_n\ ,\qquad n=1,2,3,\ldots$$

ב.

בשימוש בהגדרת מקדמי פורייה נקבל

$$\alpha_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}h(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos x\,dx=a_1\,,$$

$$\alpha_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}h(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos x\cos nx\,dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\big(\cos(n-1)x+\cos(n+1)x\big)\,dx=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2},\quad n=1,2,3,\ldots$$

$$\beta_1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}h(x)\sin x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos x\sin x\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin 2x\,dx=$$

$$\beta_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}h(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos x\sin nx\,dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\big(\sin(n+1)x+\sin(n-1)x\big)\,dx=\frac{b_{n-1}+b_{n+1}}{2},\quad n=2,3,\ldots$$

וכחנו כי

$$\alpha_0=a_1\,,$$

$$\alpha_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}\,,\qquad n=2,3,\ldots,$$

$$\beta_1=\frac{b_2}{2}\,,$$

$$\beta_n=\frac{b_{n-1}+b_{n+1}}{2}\,,\qquad n=1,2,3,\ldots.$$

2.

ספר ממשי נתון כלשהו. הוכח כי סדרת הפונקציות

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\cos(x+\theta),\sin(x+\theta),\cos(2x+\theta),\sin(2x+\theta),\ldots\right\}$$

רכת אורתונורמלית במרחב E ביחס למכפלה הפנימית

$$\langle f,g\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\overline{g(x)}\,dx\,.$$

היא מערכת אורתונורמלית במרחב E ביחס $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\sin nx,\cos nx\right\}_{n=1}^{\infty}$

פנימית הנתונה (ר' סקר תאוריה). מכאן, בשימוש בתכונות המכפלה

מסקנאות