פתרון תרגיל בית 7 – טופולוגיה

**שאלה 1**

תהי  קבוצה אינסופית. יהי  איבר ב-. נגדיר .

1. הוכיחו ש- טופולוגיה על .
2. הראו שכל הנקודונים ב-, פרט ל-, הינם סגוחים. מה לגבי ?
3. הראו: .
4. הראו: .

**פתרון**

1. נראה שמתקיימות 3 התכונות של טופולוגיה:
2.  שכן .  שכן סופית.
3. יהיו  .יתכנו שני מקרים:
4.  או . במקרה זה  ומכאן .
5.  סופיות. במקרה זה נקבל ש-  
   סופית כאיחוד סופי של סופיות וגם במקרה זה נקבל ש- .
6. נניח שלכל  מתקיים . יתכנו שני מקרים:
7. לכל  ,  במקרה זה נקבל ומכאן .
8. קיים  כך ש  סופית אבל במקרה זה נסיק ש-  סופית. לכן, גם במקרה זה .
9. תהי  נראה ש  סגוחה. פתוחה שכן .

 סגורה- נוכיח זאת על-ידי כך שנראה כי פתוחה. מתקיים  סופית ולכן פתוחה.

נראה כעת ש-  סגורה ואינה פתוחה.

סגורה- בדיוק כפי שמוכיחים ש-  סגורה.  אינה פתוחה שכן  וכמו כן  אינסופית כי  אינסופית.

1. נפרק לשני מקרים:

 סופית:

במקרה זה יש להראות כי , ואנחנו נראה זאת ע"י כך שנראה כי  סגורה. ואכן,  סופית, לכן  פתוחה ולכן  סגורה.  אינסופית:

במקרה זה יש להראות כי . נראה כי  היא הקבוצה הסגורה המינימלית המכילה את . תחילה נשים לב כי אם  אינסופית וכן , אזי  אינה סגורה. אכן, אם נניח בשלילה כי היא סגורה, נקבל ש- פתוחה. אך  ולכן בהכרח מתקיים  סופית. אבל אז נקבל ש- סופית, בסתירה לנתון.

כעת, נראה כי  סגורה. מתקיים  ולכן  פתוחה, ולכן סגורה. מצד שני, אם **** אז ממילא סגורה (למה?) ומתקיים

1. גם כאן יש שני מקרים:

 סופית:

במקרה זה,  היא קבוצה פתוחה (לפי הגדרת הטופולוגיה) ולכן .

אינסופית:

נראה  תת קבוצה פתוחה מקסימלית של  ומכאן .

פתוחה:

 ולכן  פתוחה.

מקסימלית:

אם  אז המקסימליות ברורה.

אם  אז  לא פתוחה (שכן במקרה זה  וגם אנו תחת ההנחה ש- אינסופית.)

ומכאן הפתוחה המקסימלית המוכלת ב-.

**שאלה 2**

יהי  מ"ט ותהי . תהי  פונקציה אופיינית המוגדרת על-ידי . יהי ****.

1. הוכיחו שאם  רציפה ב- אז .
2. הוכיחו ש  רציפה אמ"מ  אמ"מ  סגוחה ב-.
3. הסיקו שאם  לא קשיר אז קיימת פונקציה רציפה ועל .

**פתרון**

1. נחלק למקרים: מקרה ראשון- . לכן, . מהרציפות בנקודה  ומכיון ש- היא סביבה של  נקבל שקיימת  סביבה של  כך ש- . מכאן נובע ש- . לכן,  ולכן . מקרה שני- . לכן, .  מהרציפות בנקודה  ומכיון ש- היא סביבה של  נקבל שקיימת  סביבה של  כך ש-. מכאן נובע ש  ולכן  ובסה"כ .
2. עפ"י סעיף א' ומה שהוכחנו בתרגול  רציפה ב- אמ"מ . כעת,  רציפה אמ"מ  רציפה ב- לכל  וזה אמ"מ  לכל . התנאי האחרון מתקיים אמ"מ .

נוכיח את טענת העזר הבאה ונסיים את ההוכחה.

טענת עזר:  אמ"מ סגוחה.

הוכחת טענת עזר:

 אם  סגוחה אז היא סגורה ופתוחה. מכאן  וגם. מכאן .

 תמיד מתקיים  ולכן אם  נקבל ש ומכאן גם  ולכן סגוחה.

מש"ל הוכחת טענת עזר.

הערה: ניתן היה לפתור את התרגיל בשימוש ברציפות גלובלית ובכך שרציפות שקולה לכך שתמונה הפוכה של פתוחה (סגורה) היא פתוחה (בהתאמה סגורה).

1. אם  לא קשיר אז קיימת סגוחה לא טריוויאלית  ואז עפ"י סעיף ב' הפונקציה  רציפה. מכיון ש נקבל ש-  על (מדוע?).

**שאלה 3**

יהימ"ט, ותהיינה  ת"ק.

1. הוכיחו כי מתקיים .
2. הראו על ידי דוגמה נגדית כי לא ניתן להחליף את ההכלה בסעיף א' בשיוויון.
3. נסחו והוכיחו טענה דומה (כמו בסעיף א') עבור .

**פתרון**

1.  ולכן . מכיוון ש- סגורה, מקבלים הדרוש.
2. נתבונן במרחב המטרי  ויהיו  אזי 

 ולכן  ומתקיים .

1. טענה: .

הוכחה:  וגם  (לפי ההגדרה של הפנים) ולכן . אך  זו קבוצה פתוחה שמוכלת ב- ולכן . באותו אופן מראים ש- וזה מסיים את ההוכחה.

**שאלה 4**

יהיו  מ"ט, ותהי  הומאומורפיזם. הוכיחו כי לכל  מתקיים:

1. 
2. 
3. 
4. 

**פתרון**

1.  הומיאו' ובפרט פונקציה פתוחה ולכן  פתוחה. כמו כן  ולכן . בסה"כ נקבל ש-  פתוחה המוכלת ב  ולכן . נוכיח את ההכלה ההפוכה ונקבל שוויון.

באופן דומה, מכיון ש-  הומיאו' אז  פתוחה ומכאן  לכל . נציב  ונקבל  . נפעיל  על שני האגפים ונקבל ש-. בסה"כ .

1. נוכיח סעיף זה באמצעות סעיף א' שהוכחנו וסעיפים ג' ו- ד' שנוכיח בהמשך (שימו לב שבכל אחד מהסעיפים האלו ניתן להציב כל תת קבוצה של ). מכיון ש- הפיכה מתקיים . כעת, מסעיף ד' . מסעיף א'  מסעיף ג' .
2.  פתוחה ומוכלת ב- ולכן  וגם  סגורה. מכאן, . נוכיח כעת את ההכלה ההפוכה . יהי  אזי  ולכן לכל סביבה  של  מתקיים . כלומר, לכל סביבה  של  מתקיים . מכאן, .

דרך נוספת לפתרון: ****

1. נשים לב שסעיף ג' שהוכחנו נכון לכל תת קבוצה של . בפרט,  . קיבלנו ש-. ולבסוף נקבל ש-  כדרוש.

[גם כאן יש דרך נוספת כמו בסעיף הקודם. נסו בעצמכם.]

**שאלה 5**

יהי  מרחב טופולוגי,  קבוצה פתוחה וְ-קבוצה צפופה.

1. הוכיחו  והסיקו: .
2. אפיינו את המרחבים הטופולוגיים  עבורם הקבוצה הצפופה היחידה היא  עצמה. הוכיחו את תשובתכם.

**פתרון**

1. נניח בשלילה שקיים  ו- . אזי קיימת סביבה  של  כך ש . כעת,  פתוחה ו- ולכן גם  סביבה של . לכן,  סביבה של  המקיימת . בסתירה לכך ש- צפופה (אחד מהקריטריונים לצפיפות הוא:  צפופה אם ורק אם  לכל  פתוחה ולא ריקה. אצלנו,  פתוחה ולא ריקה).

מכאן .

**הוכחת המסקנה: ** ומכאן **** נוכיח את ההכלה הפוכה ונקבל הדרוש.

 סגורה המכילה את  ומכאן ****. בסה"כ ****.

1. תכונה זו מאפיינת את המרחבים הטופולוגיים הדיסקרטיים. נוכיח זאת. בכיוון הראשון, יהי  מ"ט דיסקרטי ותהי  קבוצה צפופה, כלומר . מכיוון שכל קבוצה בטופולוגיה הדיסקרטית היא סגורה, נקבל  ולכן  כנדרש. בכיוון השני: יהי  מ"ט המקיים את התכונה (הקבוצה הצפופה היחידה היא המרחב כולו) ונוכיח שהוא דיסקרטי. יהי  ונראה ש- היא קבוצה פתוחה. נתבונן בקבוצה . אם  סגורה – סיימנו. אחרת  (הכלה ממש), ולכן , מה שאומר, לפי הנתון, ש- וזו סתירה.

**שאלה 6**

הוכיחו שבכל מרחב נורמי מתקיים . מצאו דוגמה נגדית עבור מרחב מטרי שאינו נורמי.

**פתרון**

נראה קודם דוגמה נגדית במרחב מטרי שאינו נורמי: נבחר  עם המטריקה הדיסקרטית: . אזי נבחר את הכדור הפתוח  ומתקיים  ולכן סגור.

שימו לב: סגור של קבוצה סגורה הוא הקבוצה עצמה ולכן  (כמו כן, יכולתם לראות שזה הסגור דרך הקריטריון של הסדרות). מאידך, .

כעת נוכיח את הטענה במרחב נורמי:

נוכיח הכלה דו כיוונית:

 - שימו לב שהכלה זו נכונה בכל מרחב מטרי, לאו דווקא מרחב נורמי. מתקיים , הוכחתם ש- היא קבוצה סגורה בכל מרחב מטרי ולכן .

- שימו לב שהכלה זו אינה נכונה בכל מרחב מטרי (ראו דוגמה נגדית) אך כן נכונה בכל מרחב נורמי. יהי  ונראה שיש סדרה ב-  שמתכנסת אליו.

מוטיבציה לבחירת הסדרה:  ולכן  ואז לכל  מתקיים  . ז"א, אנחנו מחפשים סדרה  כך ש- ואז יהי מובטח ש-. מהעברת אגפים נקבל את הסדרה:

. מתקיים  שכן: 

**שאלה 7**

תהיינה  טופולוגיות על  כך ש-. הוכיחו:

1.  סגורה ב-   סגורה ב- .

נסמן ב-  את הפנים של  במרחב  (כנ"ל עבור ).

1. הוכיחו או הפריכו: , .

היעזרו (בין השאר) במה שהוכחתם על היחס בין הטופולוגיה הרגילה על  לבין הטופולוגיה של סורגנפריי וענו על הסעיף הבא:

1. יהי  הישר של סורגנפריי. מצאו פנים וסגור של הקבוצות הבאות

.

**פתרון**

1.  סגורה ב- ולכן  ולכן  ולכן  סגורה ב-.
2. : 

:

 וגם . כעת נשים לב שלפי א', אם  וכן סגורה לפי  אזי  סגורה לפי . לכן .

1. שימו לב שהטופולוגיה של סורגנפריי מכילה את הטופולוגיה הרגילה, ולכן כל קבוצה פתוחה לפי הרגילה, פתוחה לפי סורגנפריי; וכנ"ל לגבי קבוצה סגורה (לפי סעיף א').

 פתוחה לפי סורגנפריי ומתקיים . מה לגבי הסגור? הקבוצה אינה סגורה, מכיוון שיש בה סדרה המתכנסת ל-. לכן . מצד שני,  סגורה ולכן זו בהכרח הקבוצה הסגורה המינימלית המכילה את  ומכאן  .

: זו קבוצה סגורה בטופולוגיה הרגילה ולכן סגורה גם בסורגנפריי ולכן . בנוסף, נשים לב כי זו קבוצה לא פתוחה: כי כל סביבה של  מכילה סביבה מהצורה  עבור כלשהו ולכן לא מוכלת בקבוצה. נמצא את הפנים: הפנים הוא הקבוצה הפתוחה המקסימלית שמוכלת ב- ולכן .

: סגוחה (בדקו!) ולכן .

: ניתן לראות (משני נימוקים קודמים) שהיא אינה פתוחה ואינה סגורה. הפתוחה המקסימלית שמוכלת בתוכה היא  והסגורה המינימלית שמכילה אותה היא  ולכן: .