אדראור
עידן

27/11/17

המשך מ"מ:

מ"מ פואסון:

כאשר מבצעים n ניסויי ברנולי עם סיכוי הצלחה p וידוע:
n גדול, p קטן. אז מס' ההצלחות ב-n הניסויים מתפלג בקירוב
פואסון עם פרמטר $\lambda = np$.

משפט:

אם $X\sim Bin(n,\frac{\lambda}{n})$ $\quad \{p=\frac{\lambda}{n};\ \lambda \text{ קבוע};\ n\to\infty;\ p\to 0 \text{ סיכוי קטן}\}$

אז $P(X=i)\xrightarrow{n\to\infty} P(Y=i)$ כאשר $Y\sim Poi(\lambda)$ $\quad \{n\cdot p = n\cdot\frac{\lambda}{n}\}$

← **הוכחה:**

המטרה: $P(Y=i)=e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^i}{i!}$

הסדרה שיש להוכיח את התכנסותה: $P(X=i)=\binom{n}{i}\cdot p^i\cdot(1-p)^{n-i}$

$$\Rightarrow P(X=i)=\frac{n!}{(n-i)!\cdot i!}\cdot\left(\frac{\lambda}{n}\right)^i\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-i}=\frac{\lambda^i}{i!}\cdot\frac{n!}{(n-i)!}\cdot\frac{1}{n^i}\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-i}$$

$$=\underbrace{\left[\frac{\lambda^i}{i!}\left(1+\frac{-\lambda}{n}\right)^n\right]}_{n\to\infty:\ \frac{\lambda^i}{i!}\cdot e^{-\lambda}}\underbrace{\left[\frac{n!}{(n-i)!}\cdot\frac{1}{n^i}\cdot\frac{1}{(1-\frac{\lambda}{n})^i}\right]}_{\text{צ"ל}\ \to 1}.$$

$$\Rightarrow \frac{n!}{(n-i)!}=n(n-1)\cdots(n-(i+1))=n^i+O(n^{i-1})$$

$$\frac{n!}{(n-i)!}\cdot\frac{1}{n^i}=1+O\left(\frac{1}{n}\right)\longrightarrow 1$$

$$\underbrace{\frac{1}{(1-\frac{\lambda}{n})^i}}_{1^i}\to\frac{1}{(1-0)^i}=1\quad (n\to 0)$$

תכונות של מ"מ פואסון:

① התוחלת של מ"מ $X\sim Poi(\lambda)$ היא $E[X]=\lambda$.
(לא צריך להפתיע כי זו גם התוחלת של הבינומי המתאים)

הוכחה:

$$E[X]=\sum^{\infty}k P_X(k)=\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}\sum_{k=1}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}=e^{-\lambda}\cdot\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

$k=0 \Rightarrow k e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}=0$

$$(t=k-1)=e^{-\lambda}\cdot\lambda\sum_{t=0}^{\infty}\frac{\lambda^t}{t!}=e^{-\lambda}\cdot\lambda\cdot e^{\lambda}=\lambda$$

② השונות של מ"מ $X\sim Poi(\lambda)$ היא λ. (זה מסתדר עם השונות של $Bin(n,\frac{\lambda}{n})$ שהיא $\lambda \approx n\cdot\frac{\lambda}{n}\cdot\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)}_{\approx 1}$)

$$V[X]=\underbrace{E[X^2]}_{\text{נחשב}}-\underbrace{(E[X])^2}_{\lambda^2}$$

$$\Rightarrow E[X^2]=\sum k^2 P_X(k)=\sum_{k=0}^{\infty}k^2\cdot e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}k^2\cdot\frac{\lambda^k}{k!}=$$

$$=e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\frac{\lambda^k}{(k-1)!}=e^{-\lambda}\cdot\lambda\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\xrightarrow{\text{דרך 1}}$$ אינטגרציה איבר-איבר בטור

$$\xrightarrow[(t=k-1)]{\text{דרך 2}}=e^{-\lambda}\cdot\lambda\sum_{t=0}^{\infty}(t+1)\frac{\lambda^t}{t!}=e^{-\lambda}\cdot\lambda\left(\sum_{t=0}^{\infty}t\frac{\lambda^t}{t!}+\sum_{t=0}^{\infty}\frac{\lambda^t}{t!}\right)=$$

$$=\lambda\Big(\underbrace{\sum_{t=0}^{\infty}t\cdot e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^t}{t!}}_{\text{תוחלת של } Poi(\lambda) \text{ חשבנו מקודם: } \lambda.}+\underbrace{\sum_{t=0}^{\infty}e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^t}{t!}}_{\text{סכום ההסתברויות של } Poi(\lambda)=1}\Big)=\lambda(\lambda+1)$$

$$\Rightarrow\quad V[X]=\lambda(\lambda+1)-\lambda^2=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda$$

תבנית פואסון:

הפואסון הוא קירוב לבינומי ולכן הוא קירוב טוב גם למ"מ הדומים לבינומי.
<u>למשל</u>: אם מבצעים הרבה ניסויים שונים קצת זה מזה (p של הניסוי שונה מניסוי לניסוי) כל עוד כל ערכי p קטנים, מס' ההצלחות ב-n ניסויים כאלו עדיין יהיה בקירוב פואסון.
כמו כן, אם הניסויים תלויים קצת (תוצאות ניסוי אחד משפיעה אבל לא בהרבה על תוצאות ניסוי אחר) עדיין מס' ההצלחות יהיה בקירוב פואסוני.

<u>דוגמאות</u>: בעיית המזכירה.
יש n מעטפות עם שמות ו-n מכתבים עם שמות. המכתבים מוכנסים למעטפות באופן אקראי, סביב בעיה זו אפשר לשאול מה ההתפלגות של מס' המכתבים שיגיעו לנמען - מכתב+מעטפה עם אותו שם. נסמן ב-X_i את תוצאות הניסוי ה-i. כאשר הניסוי ה-i הוא "האם למעטפה ה-i נכנס המכתב המתאים?". המ"מ בו אנו עוסקים הוא $X=\sum_{i=1}^{n}X_i$. X- סופר מס' הצלחות ב-n ניסויים. לו כל הניסויים היו ב"ת, X היה מ"מ בינומי ו n ניסויים עם סיכוי הצלחה $\frac{1}{n}$, כלומר $X\sim Bin(n,\frac{1}{n})$.

הרצאה שידן
27/4/22

המשך-

← אבל הניסויים תלויים, למשל: אם הייתה הצלחה בניסוי ה-1, סיכויי ההצלחה בניסויים הבאים עולים ל- $\frac{1}{n-1}$. (מעטפה אחת פחות לרשותך).
כאשר n גדול $\frac{1}{n} \approx \frac{1}{n-1}$, כלומר השפעת תוצאות ניסוי אחד על אחר היא מזערית לכן בקירוב טוב, $X \sim Poi(n \cdot \frac{1}{n})$.
X קרוב לבינומי בעולם האידיאלי שאין תלות.
← תזכרו לשאלה הקודמת שדנו בבעיית המזכירה ותראו הסתברות דומה לפואסון. (שם חישבנו רק n איברים ראשונים של הטור של e^{-1}).

מ"מ גיאומטרי:

מסמנים $X \sim Geo(p)$ כאשר X הוא מס' הניסיונות עד ההצלחה הראשונה בסדרת ניסויי ברנולי עם הסתברות הצלחה p. (ניסויים זהים ובת"ל).

דוגמאות:

1. מס' הטלות מטבע עד שיוצא "עץ"
2. מס' הטלת קובייה הוגנת עד שיוצא 4: $X \sim Geo(\frac{1}{6})$ (6 תוצאות שונות לניסוי => 5 נחשבות כשלון) הצלחה/כשלון
3. מס' השליפות של כדורים מכד עם כמה צבעים (עם החזרה! אחרת הניסויים תלויים) עד שיוצא לבן.

תכונות של מ"מ גיאומטרי:

1. $P_X(k) = \underbrace{(1-p)^{k-1}}_{k-1 \text{ כשלונות}} \cdot \underbrace{p}_{\text{הצלחה אחת}}$ (לא ופס!) $k=1,2,3...$

2. $E[X] = \frac{1}{p}$, נחשב:

$$\Rightarrow E[X] = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (1-p)^{k-1} \cdot p$$ דרך 1 ← אינטגרציה איבר איבר.

דרך 2
$$\sum_{k=1}^{\infty} (k-1+1)(1-p)^{k-1} \cdot p = \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)(1-p)^{k-1} \cdot p + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} \cdot p}_{\text{סכום הסתברויות} = 1}$$

$$(t=k-1) = \left(\sum_{t=0}^{\infty} t(1-p)^t \cdot p\right) + 1 = 1 + \sum_{t=1}^{\infty} t(1-p)^t \cdot p = 1 + (1-p)\underbrace{\sum_{t=1}^{\infty} t(1-p)^{t-1} \cdot p}_{Geo(p) \text{ תוחלת של}}$$

$t=0 \Rightarrow t(1-p)^t \cdot p = 0$

$$= 1 + (1-p)E[X] \xrightarrow{\text{קיבלנו משוואה}} E[X] = 1 + (1-p)E[X]$$

$$\Rightarrow 1 \cdot E[X] - (1-p)E[X] = 1 \Rightarrow pE[X] = 1 \Rightarrow E[X] = \frac{1}{p}$$

3. $V[X] = \frac{1-p}{p^2}$ הוכחה:

$$E[X^2] = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot (1-p)^{k-1} \cdot p =$$ אינטגרציה איבר איבר פעמיים! = ...

מ"מ בינומי שלילי:

מ"מ X הוא בינומי שלילי עם פרמטרים r,p ומסמנים $X\sim NB(r,p)$
כאשר X הוא מס' הניסויים עד ההצלחה ה-r בסדרת ניסויי ברנולי
ב"ת, כ"א עם הסתברות הצלחה p.

הגדרה: $X=\sum_{i=1}^{r} X_i$, כאשר X_i - מס' הניסויים מההצלחה ה-i-1
עד ההצלחה ה-i. כל X_i מתפלג $Geo(p)$.
והם ב"ת כי הם עוסקים בתוצאות ניסויים שונים.

דוגמאות:

① מס' הטלות הקובייה עד שיוצא 3 בפעם הרביעית:

$\underbrace{113}_{3=X_1},\ \underbrace{456673}_{6=X_2}\ \underbrace{3}_{3=X_3}\ \underbrace{2223}_{4=X_4} \Rightarrow X=\sum_{i=1}^{4} X_i=14$

תכונות של בינומי שלילי:

①
$$P_X(k)=P(X=k)=P\left(\text{ההצלחה ה-r היא בניסוי ה-k}\right)$$
$$=P\left(\text{הצלחה בניסוי ה-k}\right)\underset{\text{ניסויים ב"ת}}{\cdot} P\left(\text{r-1 הצלחות בדיוק ב-k-1 הניסויים הראשונים}\right)=p\cdot\binom{k-1}{r-1}\cdot p^{r-1}\cdot(1-p)^{(k-1)-(r-1)}$$
$$=\binom{k-1}{r-1}p^r(1-p)^{k-r}\quad\left\{k=r,r+1,\dots \;\middle|\; \text{לפחות r ניסויים בשביל r הצלחות}\right\}$$

②
$$E[X]=E\left[\sum_{i=1}^{r}X_i\right]\overset{X_i\sim Geo(p)}{=}\sum_{i=1}^{r}E[X_i]=r\cdot\frac{1}{p}=\frac{r}{p}$$

③
$$V[X]=V\left[\sum_{i=1}^{r}X_i\right]\overset{X_i,X_j\text{ ב"ת}}{=}\sum_{i=1}^{r}V[X_i]=\sum_{i=1}^{r}\frac{1-p}{p^2}=\frac{r(1-p)}{p^2}$$

תכונת חוסר הזכרון:

משפט: אם $X\sim Geo(p)$ אז $P(X\ge s+t\mid X\ge s)=P(X\ge t)$ (לכל s,t טבעיים.)

משמעות: אם חיכינו כבר s ניסויים להצלחה הראשונה והיא לא הגיעה,
ההסתברות שנמתין t ניסויים נוספים זהה להסתברות שהיינו ממתינים t ניסויים מההתחלה.

הוכחה:

$$P(X>k)=P\left(\text{כשלונות ב-k הניסויים הראשונים}\right)=(1-p)^k$$
$$P(\overbrace{X>s+t}^{A}\mid \overbrace{X>s}^{B})=\frac{P(X>s+t\text{ וגם }X>s)}{P(X>s)}\underset{A\subseteq B}{=}\frac{P(X>s+t)}{P(X>s)}=\frac{(1-p)^{s+t}}{(1-p)^s}$$
$$=(1-p)^t=P(X>t)$$

$X>s+t \Rightarrow X>s$

סיון

27/11/17

- המשך -

משפט: אין עוד מ"מ בדיד המקבל את המספרים $1,2,3,\dots,\infty$ ומקיים את תכונת חוסר הזכרון. (בהמשך נלמד על מ"מ רציף המקיים תכונה זו).

← אם $P(X \geq s+t \mid X \geq s)$ לכל s,t טבעיים אז $X \sim Geo$.

מ"מ היפרגיאומטרי:

מסמנים $X \sim Hyp(N,m,k)$

X - מס' הכדורים הלבנים כאשר שולפים ללא החזרה k כדורים מתוך כד שבו N כדורים, מתוכם m לבנים.

הערה: לו היינו שולפים עם החזרה X היה סופר את מס' ההצלחות ב-k ניסויים ב"ת, עם סיכוי הצלחה $\frac{m}{N}$.

כלומר $X \sim Hyp(N,m,k)$ דומה למ"מ $Bin(k,\frac{m}{N})$ אבל ש- בניסויי שלנו הוא מדובר תלויות.

תכונות:

$$P_X(t) = P(X=t) = P\left(\text{t לבנים בשליפה של k מתוך N ללא החזרה}\right) = \frac{\binom{m}{t}\binom{N-m}{k-t}}{\binom{N}{k}}$$

t לבנים

k-t שחורים

שליפה ללא החזרה של k מתוך N

$t=0,1,2,\dots,k$