תרגול : אינדוקציה

1. הוכח את השוויונות הבאים לכל n טבעי בעזרת אינדוקציה:

א. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$

ב. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{2n(2n+1)}=\frac{2n}{2n+1}$.

ג. $1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$

ד. $1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+(2n)^2=\frac{n}{3}(2n+1)(4n+1)$

ה. $1+2+4+8+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$

ו. $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

ז. $n+(n+1)+(n+2)+\cdots+3n=2n(2n+1)$

2. הוכח באינדוקציה כי עבור כל n **טבעי זוגי** מתקיים:

$$1^2-3^2+5^2-7^2+\cdots+(2n-3)^2-(2n-1)^2=-2n^2$$

3. מצא את ה- n הקטן ביותר שהחל ממנו אי-השוויון מתקיים, והוכח אותו באינדוקציה:

$a.\quad 3n-1<2^n \qquad b.\quad n^2+1<3^n \qquad c.\quad 2n^3+1<4^n$

4. א. הוכח באינדוקציה כי לכל n טבעי, $2^{n+1}+5^n$ מתחלק ב-3 ללא שארית.

ב. הוכח באינדוקציה כי לכל n טבעי, 7^n-3^n מתחלק ב-4 ללא שארית.

ג. הוכח באינדוקציה כי לכל n טבעי, $2\cdot 7^n+3\cdot 5^n+7$ מתחלק ב- 12 ללא שארית.

5. הוכח באמצעות אינדוקציה שלמה כי כל מספר טבעי הגדול או שווה ל-2 ניתן להיכתב בצורה $2a+3b$ כאשר a,b טבעיים.

הערה: אינדוקציה שלמה פירושה שבשלב האינדוקטיבי במקום להניח נכונות רק ל- $n=k$, אנו מניחים נכונות **לכל** $n\le k$, ומוכיחים ל-$n=k+1$.

6. נגדיר באופן רקורסיבי קבוצה $S\subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ כאשר N={0,1,2,…} ע"י:

<u>בסיס הרקורסיה</u>: $(0,0)\in S$;

<u>כלל הרקורסיה</u>: $\forall(a,b)\in S:(a+1,b+1)\in S\wedge(a,b+1)\in S\wedge(a+2,b+1)\in S$.

1) רשום את איברי S המתקבלים אחרי 3 הפעלות של כלל הרקורסיה.

2) הוכח תוך שימוש באינדוקציה שמתקיים: $\forall(a,b)\in S: a\le 2b$.

7. הוכח באינדוקציה שסכום הזויות במצולע קמור בעל $n\ge 3$ צלעות (מצולע שכל אלכסוניו נמצאים בתחומו) הוא $180(n-2)$.

תזכורת: המצולע הקטן ביותר הוא משולש וסכום זוויותיו הוא 180.