25.02.14 (1)

(תרגיל מלפני) שיטות נומריות למשוואות דיפרנציאליות - הרצאה 1

## פתרון משוואות

נתונה פונ' רציפה/גזירה $f(x)$, רוצים למצוא $\tilde{x}$

כך ש $f(\tilde{x})=0$

### משוואות לינאריות

$$Ax=b \qquad A\in M_{k\times n}, \quad x\in \mathbb{R}^n, \quad b\in \mathbb{R}^k$$

3 אפשרויות:

1. יש פתרון יחיד
2. אין פתרון
3. $\infty$ פתרונות

כש $A$ ריבועית $\begin{cases} \det A=0 \to \text{אין פתרון או } \infty \text{ פתרונות} \\ \det A\neq 0 \to \text{פתרון יחיד} \end{cases}$

אם $A$ אינה ריבועית (באופן כללי) מסתכלים על הדרגה שלה.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ax_1+bx_2 \\ cx_1+dx_2 \end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

צ"ל של עמודות של $A$, נס' $RgA$ (מרחב העמודות של $A$)

$\to$ Range

נס' אם $b\in RgA$ קיים פתרון.
אחרת אין פתרון.

(לכבי' קיים פתרון)

$$\ker A = \{x \mid Ax = 0\}$$

(יחידות פתרון)

פתרון טריוויאלי תמיד בגרעין.

אם $\ker A = \{0\}$ יש פתרון יחיד

אחרת יתכנו $\infty$ פתרונות.

- פתרון $Ax=b$ נעשה ע״י גאוס-ג׳ורדן

דירוג מטריצה

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^* & \cdots \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}$$

ע״י פעולות אלמנטריות, למשל:

<u>פעולות שורה</u>:

$$r_k \longrightarrow a r_k$$

$$r_k \to a r_k + b r_n$$

פעולות לדוגמא במחשב:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad r_1 \longrightarrow \frac{r_1}{a}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ c & d \end{pmatrix} \qquad r_2 \to \frac{r_2}{c} - r_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & \frac{d}{c} - \frac{b}{a} \end{pmatrix} \qquad r_2 \to r_2 \cdot \frac{1}{\frac{d}{c} - \frac{b}{a}}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$$

back-substitution

$$x_2 = e$$

$$x_1 + \frac{b}{a} x_2 = d$$

$$x_1 = d - \frac{b}{a} x_2$$

25.02.14 (2)

בעיות שצצות בתכנות במחשב הן למשל

a יכול להיות קטן מאוד (כמעט אפס) (והמחשב יטעה בנומריקה)

ב Matlab 64bit ; double precision

מייצג

1 bit : sign ← מייצג סימן

11 bit : exponent $\pm a \cdot 10^b$

52 bit : fraction ~ 17 ספרות עשרוניות

שיטה להימנעות מהבעיה - pivoting

* החלפת שורות או עמודות לפני החלוקה, לצורך חלוקה במספר יותר גדול והמנעות מחלוקה במספר קטן מאוד.

pivoting היא שיטה יוריסטית = לא מבטיחה פתרון "אמיתי" וטוב אלא משפרת את התוצאה.

## LU decomposition פירוק LU

נתונה מטריצה ריבועית $A \in M_n$

משפט: ניתן לרשום $A = LUP$

כאשר $L, U, P \in M_n$

כאשר $L$ משולשית תחתונה, 1 באלכסון

$U$ - משולשית עליונה.

$P$ - פרמוטציה (בכל שורה ובכל עמודה הספרה '1' מופיעה פעם אחת והשאר 0)

הערכים של $U$ באלכסון נקראים singular values (הכללה לערכים עצמיים)

(אם $A$ לכסינה אז ע"ע = s.V)

בעזרת LU ניתן לפתור בקלות מערכת משוואות לינארית

הפתרון לפי: אם $Ax=b$

נניח $P=id$ כלומר $A=LU$

רוצים לפתור $LUx=b$

נסמן $Ux=y$

(1) $Ly=b$ (2) $Ux=y$

היתרון הוא ש $L$ ו $U$ משולשיות ולכן כל מה שיש לעשות הוא back-substitution ($L,U$ מדורגות).

חישוב $L,U$

$$L=\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ l_{21} & \ddots & & \\ l_{31} & l_{32} & \ddots & \\ \vdots & & & 1 \end{pmatrix} \qquad U=\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & \vdots \\ & u_{22} & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & u_{nn} \end{pmatrix}$$

$$LU=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ \vdots & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

נקבל $n^2$ משוואות עם $n^2$ נעלמים: $i$ שורה, $j$ עמודה

$$\begin{cases} i\leq j & a_{ij}=l_{i1}u_{1j}+l_{i2}u_{2j}+\cdots+l_{i,i-1}u_{i-1,j}+1\cdot u_{ij} \\ i>j & a_{ij}=l_{i1}u_{1j}+\cdots+l_{ij}u_{jj} \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} i\leq j & a_{ij}=\sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj}+u_{ij} \\ i>j & a_{ij}=\sum_{k=1}^{j} l_{ik}u_{kj} \end{cases}$$

25.02.14 ③

## (פתרון ע"פ crout למשוואות שקבלנו.

(∧ מסמן מינימום)

נסמן $l_{ii}=1$ ואז

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{i \wedge j} l_{ik} u_{kj}$$

לפי סדר

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & & u_{1n} \\ l_{21} & u_{22} & \cdots & & u_{2n} \\ l_{31} & l_{32} & u_{33} & \cdots & \\ \vdots & & & & \\ l_{n1} & \cdots & & l_{n,n-1} & u_{nn} \end{pmatrix}$$

סורקים בעמודות ואח"כ שורות (השיטה של crout)

$i=1,\ j=1$

$$a_{11} = \sum_{k=1}^{1} l_{ik} u_{kj} = l_{11} u_{11} = u_{11}$$

(מציאת $u_{11}$)

$i=2, j=1$ $$a_{21} = \sum_{k=1}^{1} l_{2k} u_{k1} = l_{21} u_{11} \Rightarrow$$ (אפשר למצוא את $l_{21}$)

$\vdots$

$i>1, j=1$ $$a_{i1} = \sum_{k=1}^{1} l_{ik} u_{k1} = l_{i1} u_{11}$$ (מציאת $l_{i1}$)

אח"כ עוברים בעמודה $j=2$

---

## שיטה איטרטיבית

נתונה $A$, רוצים למצוא $A^{-1}$.

בגלל שגיאה נומרית, לא קיבלנו בדיוק את $A^{-1}$ אלא קירוב שלה, ונסמנו $B_0$

(הרעיון הוא לקחת את $B_0$ ולקבל סדרה של קירובים טובים יותר)

נסמן ב $R$ את השארית residual.

$$R = I - B_0 A$$

אם $B_0$ מדויק: $R = 0$

נניח ש- $R$ "קטן" ונפתח את $A^{-1}$ בטור (פורמלי):

$$A^{-1} = A^{-1} B_0^{-1} B_0 = (B_0 A)^{-1} B_0 = (1-R)^{-1} B_0$$

$$= \frac{1}{1-R} B_0 \quad ; \quad \frac{1}{1-R} = 1 + R + R^2 + \dots$$

$$= (1 + R + R^2 + \dots) B_0$$

נגדיר

$$B_n = (1 + R + R^2 + \dots + R^n) B_0$$

כלומר,

$$A^{-1} = \lim_{n \to \infty} B_n$$

נחזור למשוואה הלינארית

$$Ax = b$$

$$\Rightarrow \quad x = A^{-1} b$$

קירוב טוב הוא $x = B_n \cdot b$ (יותר טוב מ $B_0 \cdot b$)

נגדיר

$$x_n = B_n \cdot b$$

אז

$$x_{n+1} = B_{n+1} \cdot b = (\underbrace{1 + R + R^2 + \dots + R^n} + R^{n+1}) B_0 \cdot b =$$

$$= x_n + \underbrace{R^{n+1} B_0 \cdot b}_{= B_0 (b - A x_n)}$$

טעה:

25.02.14 | 4

<u>הוכחת הטענה</u>

$$B_0(b-Ax_n) = B_0 b - B_0 A x_n =$$

$$= B_0 b - \underbrace{(1-R)(1+R+\dots+R^n)}_{1-R+R-R^2+R^2-R^3+\dots+R^n-R^{n+1}} B_0 b =$$

$$= B_0 b - (1-R^{n+1})B_0 b = R^{n+1} B_0 b$$

קיבלנו,

$$x_{n+1} = x_n + B_0(b-Ax_n) = (1-B_0A)x_n + B_0 b$$

$$\boxed{x_{n+1} = R x_n + B_0 b}$$ אפשר להתחיל ב- $x_0=0$

השאלה: מתי $(1-R)^{-1} = 1+R+R^2+\dots$ ?

($R$ איננו סקלר אלא מטריצה)

נגדיר נורמה מעל $M_n$. (הנורמות שקולות מעל מ.ל. סופיים)

$$\|R\| = \max_{v\neq 0} \frac{|Rv|}{|v|}$$

בפרט, אם $R$ לכסינה, עם ע"ע $\lambda_1,\dots,\lambda_n$

$$\|R\| = \max_j |\lambda_j|$$

לפי א.ש. משולש:

$$\|(1+R+R^2+\dots+R^n)B_0\|^2 = \|1+R+R^2+\dots+R^n\|^2\|B_0\|^2 \le$$

$$\le \left(\|1\|^2+\|R\|^2+\|R\|^4+\dots+\|R\|^{2n}\right)\cdot\|B_0\|^2$$

נניח ש $R$ "קטן" $\Leftarrow$ <u>התנאי</u>: $\boxed{\|R\|<1}$.

(מוצאים $B_0$ "גרוע", נגיד לא לפי $LU$ או בדרך אחרת
ואז האיטרציות יתקנו ויקרבו לפתרון)

שיטה למציאת $B_0$ , **Pan & Reif**:

$$B_0 = \varepsilon A^T$$

$$\varepsilon \le \frac{1}{\sum_{i,j} a_{ij}^2}$$

הקירוב הנ"ל גרוע אך הוא מקיים $\|R\| < 1$ ולכן האיטרציות יעבדו.

---

## פירוק: SVD - Singular Value Decomposition

יהי $A \in M_{k\times n}$ נניח $k \geq n$.

אז $A = UWV^T$ כאשר

$U \in M_{k\times n}$ אורתוגונלי (העמודות אורתונורמליות)

$W \in M_n$ אלכסוני עם אלכסון אי-שלילי.
הערכים על האלכסון נקראים singular values

$V \in M_n$ אורתוגונלי.

הפירוק יחיד עד כדי קומבינציה לינארית של שורות ועמודות.
( במקרה ש $A$ לכסינה $U = P$, $W = D$, $V^T = P^{-1}$ )
עד כדי סימן בע"ע

מתמטיקאי בשם Gene Golub פיתח שיטה איטרטיבית לפירוק SVD.

נראה למה השיטה נוחה:

---

נניח $A$ ריבועית והפיכה

$$A^{-1} = (V^T)^{-1} W^{-1} U^{-1} = V W^{-1} U^T$$

$$W = \operatorname{diag}(w_1, \dots, w_n)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = V \operatorname{diag}\left(\frac{1}{w_1}, \dots, \frac{1}{w_n}\right) U^T$$

25.02.14 (5) הבעיה הנומרית כאן תהיה שאחד מה- $w_i$ יהיה קטן ותהיה בעיה $\frac{1}{w_i}$ ?

להתגבר על הבעיה נגדיר condition number

$$\lambda = \frac{\max w_j}{\min w_j}$$

במטריצה סינגלרית (לא הפיכה) $\lambda = \infty$

אם $\lambda$ גדול: המטריצה נקראת ill-conditioned

נניח פותרים $Ax=b$

$$x = A^{-1}b = VW^{-1}U^Tb$$

נסמן

$$\tilde{W}^{-1} = diag(x_1, \dots, x_n)$$

כאשר

$$x_i = \begin{cases} \frac{1}{w_i} & w_i \neq 0 \\ 0 & w_i = 0 \end{cases}$$

וכך אנו זורקים את המספרים הגדולים שיהוו בעיה נומרית.

באופן נומרי:

$$x_i = \begin{cases} \frac{1}{w_i} & w_i \geq \varepsilon \\ 0 & w_i < \varepsilon \end{cases}$$

קבלנו כעת:

$$x = V\tilde{W}^{-1}U^Tb$$

אם $A$ אינה סינגלרית $\tilde{W}^{-1} = W^{-1}$

$$Ax = b$$

אם $A$ סינגלרית $W^{-1}$ לא קיים

אבל $x = V\tilde{W}^{-1}U^Tb$ כן

מה שקיבלנו הוא ש $x$ הוא פתרון במובן של ריבועים מינימליים.

- מערכת under-determined (יותר נעלמים מפתרונות)

מתי קיים פתרון? אם $b \in R_g A$

נניח שכן. אזי הפתרון לא יחיד. אם $x_0$ פתרון אז לכל $x' \in \ker A$, $x_0+x'$ גם פתרון

$$\|x_0+x'\|^2 = \|\underbrace{V\tilde{W}^{-1}U^Tb}_{\in R_g A} + \underbrace{x'}_{\in \ker A}\|^2 =$$

לפי פיתגורס

$\perp$

$$= \|V\tilde{W}^{-1}U^Tb\|^2 + \|x'\|^2 \geq \|x_0\|^2$$

ולכן פתרון SVD $x_0$ הוא הפתרון עם הנורמה הקטנה ביותר.

- מערכת over-determined (יותר משוואות מנעלמים)

נראה ש $x_0 = V\tilde{W}^{-1}U^Tb$ הוא פתרון במובן ריבועים מינימליים (LS) כלומר $\|Ax-b\|^2$ מינימלי.

נרשום $x = x_0 + \Delta x$

ונסמן $A\Delta x = b'$

$$\|Ax-b\|^2 = \|A(x_0+\Delta x)-b\|^2 = \|\underbrace{UWV^T}_{A}\overbrace{\underbrace{V\tilde{W}^{-1}U^Tb}_{x_0}}^{=1}+\underbrace{b'}_{A\Delta x}-b\|^2$$

$$= \|(UW\tilde{W}^{-1}U^T-\underset{UU^T}{1})b+\underset{UU^T}{b'}\|^2 =$$

נכניס

$$= \|U(W\tilde{W}^{-1}-1)U^Tb+UU^Tb'\|^2 \underset{U\text{ אוניטרי}}{=} \|\underbrace{\underbrace{(W\tilde{W}^{-1}-1)}_{\ker A\text{ הטלה על}}U^Tb}_{\in \ker A}+\underbrace{U^Tb'}_{R_g A}\|^2$$

25.07.14 6

ושוב לפי פיתגורס נקבל:

$$= \|(W\tilde{W}^{-1} - 1)U^T b\|^2 + \|U^T b'\|^2$$

מינימאלי עבור $\Delta X = 0$

(לשבוע הבא: ניוטון-רפסון פתרון מערכת לא לינארית)