תרגיל מספר 7 מבנים אלגבריים

להגשה עד 26.12.2014

1. תהא G חבורה סופית . H תת חבורה של G ו K תת חבורה של H. הוכח כי

$$|{}^{G}/_{K}| = |{}^{G}/_{H}| \cdot |{}^{H}/_{K}|$$

פתרון : נתוןממשפט לגרנז

$$|{}^{G}/_{K}| = \frac{|G|}{|K|} = \frac{|G|}{|H|} \cdot \frac{|H|}{|K|} = |{}^{G}/_{H}| \cdot |{}^{H}/_{K}|$$

.2

(א) תהא G חבורה. יהא $g \in G$ מסדר n (n טבעי). יהא $n = ab$ פירוק של המספר n. הוכח כי הסדר של g^a הוא b

פתרון : נתון כי $g^n = e$ ובנוסף, לכל $0 < m < n$ מתקיים $g^m \neq e$. נסמן $h = g^a$. צ"ל $o(h) = n$

מתקיים $h^b = (g^a)^b = g^{ab} = g^n = e$ ולכן $o(h) \leq n$. נניח בשלילה כי $m = o(h) < n$

אזי $e = h^m = (g^a)^m = g^{am}$ אבל $am < ab = n$ סתירה לנתון.

(ב) טענה: תהא G חבורה בת p^n איברים (כאשר p מספר ראשוני ו n מספר טבעי). הוכח כי קיים $g \in G$ מסדר p. (רמז: ניתן להוכיח טענה זאת באינדוקציה).

פתרון : עבור $n = 1$. יש p איברים ואז לפי משפט מההרצאה קיים לה יוצר והוא מסדר p.

כעת נניח שלכל חבורה מסדר p^m $0 < m < n$ קיים איבר מסדר p. נוכיח כי גם לחבורה בסדר p^n יש איבר מסדר p.

יהא $e \neq g \in G$ אזי הסדר שלו מחלק את p^n. אם הסדר שלו הוא p^n אזי לפי התרגיל הקודם $h = g^{p^{n-1}}$ מסדר p.

אחרת הסדר שלו p^m כאשר $0 < m < n$ ולכן סדר החבורה $\langle g \rangle$ הוא p^m לפי הנחת האינדוקציה יש $h \in \langle g \rangle$מסדר p. $h \in G$ מסדר p.

.3

(א) תהא G חבורה. H תת חבורה. הוכח כי מספר הקוסטים השמאליים שווה למספר הקוסטים הימניים.

כלומר הקבוצות$K_1 = \{gH \,|g \in G\}$ $K_2 = \{Hg \,|g \in G\}$בעלות עוצמה שווה.

(הדרכה : הגדר $\phi : K_1 \to K_2$ ע"י $\phi(gH) = Hg^{-1}$. הוכח כי ϕ מוגדרת היטב, חח"ע ועל)

פתרון : טענה ϕ מוגדרת היטב

הוכחה: נניח $g_1H = g_2H$ צ"ל כי $\phi(g_2H) = Hg_2^{-1} = Hg_1^{-1} = \phi(g_1H)$.
אם $g_1H = g_2H$ אז $g_2^{-1}g_1 \in H$ כיוון ש H תת חבורה אז גם ההופכי $\left(g_2^{-1}g_1\right)^{-1} = g_1^{-1}g_2 \in H$ ואז $Hg_1^{-1} = Hg_2^{-1}$.

חח"ע: נניח $\phi(g_1H) = \phi(g_2H)$ צ"ל $g_1H = g_2H$
מההנחה $Hg_1^{-1} = Hg_2^{-1}$ כלומר $g_1^{-1}g_2 \in H$ כמו מקודם, H תת חבורה ולכן גם ההופכי $g_2^{-1}g_1 \in H$ ואז $g_1H = g_2H$

על: יהא $Hg \in K_2$ המקור שלו יהיה $g^{-1}H \in K_1$

(ב) תהא G חבורה. H ת"ח. הוכח כי אם הסדר של G/H הוא 2 אז מתקיים כי

$$\forall g \in G : gH = Hg$$

פתרון : יהא $g \in G$ צ"ל $gH = Hg$. אם $g \in G$ אזי $gH = H = Hg$ אחרת $g \notin H$ ואז $gH \neq H$ (כי יש רק 2 אברים בקבוצת המנה). מתרגיל קודם נסיק כי גם מספר הקוסטים הימניים הוא 2. כיוון ש Hg קוסט ימני שונה מ H נקבל כי $gH = G\backslash H = Hg$